

## Recenzja rozprawy doktorskiej Adama Kunysza

### *Algorytmy dla skojarzeń silnie stabilnych*

Rozprawa doktorska Adama Kunysza dotyczy *silnie stabilnych skojarzeń*. W oryginalnym problemie *stabilnych skojarzeń* mamy zbiór uczestników, w którym każdy ma własną listę rankingową pewnego zbioru innych uczestników. Można założyć, że brak kogoś na liście rankingowej oznacza, że ktoś jest całkowicie nieakceptowalny. Celem jest takie znalezienie maksymalnego skojarzenia uczestników, aby jakakolwiek pojedyncza zmiana skutkowała tym, że ktoś zmieni skojarzonego partnera na kogoś o gorszym priorytecie ze swojej listy. Innymi słowy, jeżeli którykolwiek z uczestników zmieni skojarzonego partnera na kogoś innego, to on albo nowy partner będzie stratny. Omawiany problem ma główne dwa warianty zależne od tego, czy graf rozpięty na uczestnikach<sup>1</sup> jest grafem dwudzielnym, czy też nie. W pierwszym przypadku otrzymujemy słynny problem *stabilnych małżeństw*, który został rozwiązany przez Gale'a oraz Shapley'a<sup>2</sup> w latach 60-tych. O doniosłości tego problemu może świadczyć to, że między innymi za dokonania w tej tematyce, Gale wraz z Rothem otrzymali Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Algorytm Gale'a—Shapley'a znalazł wiele praktycznych zastosowań, takich na przykład jak: przydzielania młodszych lekarzy do szpitali w Stanach Zjednoczonych, w Kanadzie, czy też w Szkocji; czy w rekrutacji do szkół wyższych m.in. na Węgrzech, w Niemczech, a także w Chinach; oraz w wielu innych sytuacjach.

Przypadek, gdy graf rozpięty na uczestnikach jest dowolnym grafem (nie koniecznie dwudzielnym), nazywany jest *problemem współlokatorów*. W tym przypadku rozwiązanie zostało zaprezentowane przez Irvinga<sup>3</sup> dopiero w latach 80-tych.

W powyżej omawianych modelach zakłada się, że na listach rankingowych nie istnieją remisy, innymi słowy jeżeli na danej liście występują jacyś dwaj uczestnicy, to zawsze jeden z nich jest bardziej preferowany od drugiego. Takie założenie czasem nie odzwierciedla rzeczywistości. Jeżeli pozycja na liście zależy od liczby zdobytych punktów (np. w procesie rekrutacji) to jest wielce prawdopodobne, że będą istnieć dwaj uczestnicy, którzy zdobędą tę samą liczbę punktów. W takim przypadku bardziej adekwatne jest danie remisu pomiędzy nimi. Pozwolenie na istnienie remisów prowadzi do trzech różnych definicji stabilności: *slabej stabilności*, *silnej*

<sup>1</sup>Krawędź występuje pomiędzy uczestnikami jeżeli jeden z nich ma na swojej liście rankingowej drugiego.

<sup>2</sup>David Gale oraz Lloyd S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9-15, 1962.

<sup>3</sup>Robert W. Irving. An efficient algorithm for the "stable roommates" problem. *J. Algorithms*, 6(4):577–595, 1985.

*stabilności* i *super stabilności*. Skojarzenie słabo stabilne polega na tym, że jakakolwiek zmiana skojarzenia skutkowałaby tym, że któryś z uczestników nowej pary zmieniłby partnera na takiego, który ma taką samą lub gorszą rangę. W tym przypadku większość klasycznych problemów staje się NP-trudna zaś badania skupiają się na poszukiwaniu algorytmów aproksymacyjnych. Drugą skrajnością są skojarzenia super stabilne. W tym przypadku szukane jest takie skojarzenie, że jakakolwiek zmiana skutkowałaby tym, że któryś z uczestników nowej pary zmieniłby partnera na takiego, który ma gorszą rangę. To z kolei powoduje, że przypadek ten często sprowadza się do modelu z zabronionymi remisami. Omawiana rozprawa doktorska dotyczy przypadku skojarzeń silnie stabilnych, który można traktować jako model pośredni pomiędzy powyżej opisanymi. Tym razem pożądane skojarzenie ma taką własność, że poprawienie sytuacji u któregoś uczestnika nowej pary, skutkowałaby tym, że sytuacja drugiego uczestnika tej samej pary pogorszyłaby się. Takie zdefiniowanie problemu wydaje się najbardziej naturalne jak i najbliższe praktycznym zastosowaniom. Ponadto okazuje się, że w tym przypadku otrzymane wyniki są ciekawe z teoretycznego punktu widzenia.

Wyniki zaprezentowane w rozprawie doktorskiej można generalnie podzielić na trzy części. W pierwszej części autor skupia się na problemie charakteryzacji zbioru rozwiązań silnie stabilnych skojarzeń w grafach dwudzielnych. Gusfield oraz Irving<sup>4</sup> udowodnili, że w wariacie bez remisów struktura zbioru wszystkich stabilnych skojarzeń tworzy kratę dystrybucyjną. Przy czym znane są dwie jej reprezentacje, gdzie jedną z nich można skonstruować w czasie  $O(m^2)$ , a drugą w czasie  $O(m)$ . Manlove<sup>5</sup> pokazał, że w wariacie z dopuszczalnymi remisami silnie stabilne skojarzenia także tworzą strukturę kraty dystrybucyjnej. Gusfield i Irving<sup>4</sup> postawili pytanie czy analogicznie do przypadku bez remisów, tak i w wariacie z dopuszczalnymi remisami dla silnie stabilnych skojarzeń da się skonstruować efektywne charakteryzacje. Autor omawianego doktoratu podaje odpowiedź na to pytanie prezentując algorytmy konstruujące dwie takie reprezentacje. Działają one odpowiednio w złożonościach  $O(nm^2)$  oraz  $O(nm)$ , gdzie  $n$  to liczba wierzchołków, a  $m$  to liczba krawędzi w grafie. Wynik ten jest dalece nietrywialny i przez wiele lat nie było znane jakiegokolwiek rozwiązanie. O sile tego wyniku może świadczyć między innymi to, że został zaprezentowany na *ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms* w 2016 roku.<sup>6</sup>

Druga część rozprawy doktorskiej skupia się na problemie *silnie stabilnego skojarzenia w grafach ogólnych*. Scott<sup>7</sup> w 2005 zaprezentował algorytm na powyższy problem, który działa w czasie  $O(m^2)$ , gdzie  $m$  to liczba krawędzi w rozważanym grafie. Autor w omawianym doktoracie poprawia powyższy wynik prezentując algorytm, który działa w czasie  $O(nm)$ , gdzie  $n$  to liczba wierzchołków, a  $m$  to liczba krawędzi. Ponadto autor pokazuje, że w tym samym czasie można skonstruować reprezentację zbioru wszystkich możliwych rozwiązań. W tym

<sup>4</sup>Dan Gusfield and Robert W. Irving. *The Stable marriage problem - structure and algorithms*. Foundations of computing series. MIT Press, 1989.

<sup>5</sup>David F. Manlove. The structure of stable marriage with indifference. *Discrete Applied Mathematics*, 122(1-3):167–181, 2002.

<sup>6</sup>Adam Kunysz, Katarzyna E. Paluch, and Pratik Ghosal. Characterisation of strongly stable matchings. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2016, Arlington, VA, USA, January 10-12, 2016*, pages 107–119, 2016.

<sup>7</sup>Sandy Scott. A study of stable marriage problems with ties. PhD thesis, University of Glasgow, 2005.

przypadku powyższe rezultaty zostały zaprezentowane<sup>8</sup> na *European Symposium on Algorithms* w 2016 roku.

Ostatnia część pracy dotyczy problemu *znajdywania silnie stabilnych skojarzeń o największej wadze w grafach dwudzielnych*. W tym przypadku algorytm poza grafem oraz listami preferencji otrzymuje wagi będące liczbami naturalnymi, które przypisane są do krawędzi. Celem jest znalezienie takiego silnie stabilnego skojarzenia, które zmaksymalizuje sumę wag leżących na krawędziach wchodzących w skład znalezionej rozwiązania. Warto tu nadmienić, że jak dotąd nie było znane jakiegokolwiek wielomianowe rozwiązanie omawianego problemu. Autor rozprawy zaprezentował algorytm rozwiązujący powyższy problem w czasie  $O(nm \log(Wn))$ , gdzie  $W$  to maksymalna waga krawędzi w grafie. Rezultaty te zostały zaprezentowane<sup>9</sup> na *International Symposium on Algorithms and Computation* w roku 2018.

Poza literówkami, o których pozwolę sobie nie pisać, praca jest zredagowana dość dobrze zarówno pod względem stylistycznym jak i graficznym. W tym miejscu na pochwałę zasługuje szczególnie rozdział 3, który bardzo wnikliwie, wręcz podręcznikowo, wprowadza czytelnika w obecny stan wiedzy. Reszta pracy także nie budzi większych zastrzeżeń. Zaprezentowane algorytmy są nietrywialne, a dowody eleganckie. Niewątpliwie wymagały one wnikliwej analizy i żmudnej pracy. O wartości powyższych wyników może świadczyć także to, że zostały zaprezentowane na uznanych międzynarodowych konferencjach z grupy A oraz A\* według klasyfikacji *the Conference Portal - Core*.<sup>10</sup>

Podsumowując, stwierdzam, że praca pana Adama Kunysza to bardzo solidny doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących tematyki skojarzeń silnie stabilnych. Całość świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji w zakresie tematyki pracy. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Adama Kunysza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto z racji zaprezentowanego wysokiego poziomu wyników oraz ich prezentacji wnoszę o wyróżnienie omawianej rozprawy doktorskiej.

Signed by /  
Podpisano przez:



Bartłomiej Emil  
Bosek

Date / Data: 2021-  
01-06 21:42

Bartłomiej Bosek

<sup>8</sup>Adam Kunysz. The strongly stable roommates problem. In Piotr Sankowski and Christos D. Zaroliagis, editors, 24th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2016, August 22-24, 2016, Aarhus, Denmark, volume 57 of LIPIcs, pages 60:1–60:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016.

<sup>9</sup>Adam Kunysz. An algorithm for the maximum weight strongly stable matching problem. In Wen-Lian Hsu, Der-Tsai Lee, and Chung-Shou Liao, editors, 29th International Symposium on Algorithms and Computation, ISAAC 2018, December 16-19, 2018, Jiaoxi, Yilan, Taiwan, volume 123 of LIPIcs, pages 42:1–42:13. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018.

<sup>10</sup><http://portal.core.edu.au/conf-ranks/>