# AUTOREFERAT

1. IMIĘ I NAZWISKO: **Barbara Majcher-Iwanow**

2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

Magister Matematyki - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1987

Doktor Nauk Matematycznych - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1998

Tytuł rozprawy doktorskiej: *Cardinal invariants of the lattice of partitions and some related lattices*

3. ZATRUDNIENIE

1987-1988 asystent stażysta, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

1988-1999 asystent, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

1999- adiunkt, Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

4. ROZPRAWA HABILITACYJNA

4.A **RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI ORBIT WZGLĘDEM DZIAŁAŃ GRUP POLSKICH NA PRZESTRZENIACH POLSKICH**

4.B
[H1] Barbara Majcher-Iwanow, *Eventually open actions*, Math. Log. Quart. 58, no 1-2, (2012), 95-104,
[H2] Barbara Majcher-Iwanow, *Polish group actions and effectivity*, Archive for Math. Log. Vol. 51, no 5-6 (2012), 563-573

[H3] Barbara Majcher-Iwanow, *Complexity of conjugacy classes of* $A(\mathbb{Q})$, Topology Appl. 128 (2003), 173-188

[H4] Barbara Majcher-Iwanow, $G_\delta$*-pieces of canonical partitions of* $G$*-spaces*, Math. Log. Quart. 51 (2005), 450-461.

## 4.C OMÓWIENIE WYNIKÓW ROZPRAWY

### WPROWADZENIE

Rozprawę tworzy jednotematyczny cykl czterech prac wymienionych w punkcie 4.B. Wybór prac jest w znacznym stopniu oparty na klarowności motywacji i wyrazistości wyników. Prace wyszczególnione są w kolejności określonej przez priorytet celów badawczych. Wyniki prac [H1-H2] są bardzo ogólne podczas, gdy prace [H3-H4] dotyczą przypadków szczególnych lub ograniczonych pewnymi założeniami. Prace [H1-H2] zostały opublikowane w ciągu ostatnich miesięcy i nie znalazły jeszcze odbicia w bazach cytowań. Jednak niektóre wyniki tych prac zostały opisane w preprintach arXiv:math/0701788 i arXiv:1003.3258 oraz zaprezentowne na ważnych konferencjach międzynarodowych (m.in. zaproszony wykład w ramach specjalnej sekcji Logic Colloquium 2006).

Tematyka prac mieści się w obszarze niezmienniczej deskryptywnej teorii mnogości. Przedmiotem badania są działania grup polskich na przestrzeniach polskich, a w szczególności indukowane przez te działania relacje równoważności.

*Przestrzenią* (*grupą*) *polską* nazywamy ośrodkową przestrzeń (grupę) topologiczną metryzowalną w sposób zupełny. Niech $G$ będzie grupą polską, a $X$ przestrzenią polską. Odwzorowanie $a : G \times X \to X$ takie, że $a(1_G, x) = x$ i $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$ dla wszystkich $g, h \in G$ oraz $x \in X$, nazywamy *działaniem* grupy $G$ na przestrzeni $X$. Jeśli jest ono funkcją ciągłą (borelowską), wówczas mówimy, że $X$ jest $G$-przestrzenią polską (borelowską). Tradycyjnie przyjmujemy następujące oznaczenie dla wartości takiego działania: $a(g, x) = gx$. Każde działanie grupy $G$ na przestrzeni $X$ w naturalny sposób indukuje na $X$ relację równoważności:

$$xEy \iff y = gx, \text{ dla pewnego } g \in G.$$

Klasę równoważności elementu $x \in X$ takiej relacji, tj. zbiór $[x]_E = \{gx : g \in G\}$, nazywamy *orbitą* elementu $x$ i oznaczamy jako $G \cdot x$, zaś samą relację $E$ nazywamy *relacją równoważności orbit.*

Będąc ciągłym (borelowskim) obrazem przestrzeni polskiej, relacje orbit względem ciągłych (borelowskich) działań są analityczne. Wśród nich są zarówno relacje dobrze zrozumiane, posiadające prosty opis, jak i bardzo skomplikowane; relacje borelowskie rozmaitej złożoności, jak i analityczne zupełne (ang. complete analytic) (np. relacja sprzężenia w grupie automorfizmów porządkowych $A(\mathbb{Q})$, która stanowi główny obiekt badań pracy [H3]). Problem *klasyfikacji* relacji orbit stanowi istotną część ogólnego zagadnienia klasyfikacji relacji równoważności na przestrzeniach polskich i tworzy jeden z centralnych nurtów niezmienniczej deskryptywnej teorii mnogości. Najogólniej rzecz ujmując, przez *zupełną klasyfikację* relacji równoważności $E$ na przestrzeni polskiej $X$ będziemy rozumieć każdą dobrze zdefiniowaną, posiadającą pewne pożądane własności (takie jak ciągłość, borelowska mierzalność lub podobne) funkcję

$$\Theta : X \to I$$

z przestrzeni $X$ w jakąś znaną, dobrze opisaną rodzinę niezmienników $I$ taką, że dla wszystkich $x, y \in X$ spełniony jest warunek:

$$xEy \Longleftrightarrow \Theta(x) = \Theta(y).$$

Relacje, dla których jako zbiór niezmienników $I$ możemy przyjąć zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, a klasyfikacja $\Theta$ jest odwzorowaniem borelowskim nazywamy *gładkimi*. Jeśli zbiorem niezmienników $I$ jest rodzina przeliczalnych struktur pewnego języka pierwszego rzędu rozważanych z dokładnością do izomorfizmu, a ich przyporządkowanie $\Theta$ jest funkcją borelowską, wówczas mówimy o *klasyfikacji przez przeliczalne modele*. Klasyfikacja przez *przeliczalne modele* stanowi przedmiot badań czołowych specjalistów w tej dziedzinie. W pracy [4] H.Becker i A.Kechris udowodnili następujące twierdzenie odnoszące się do relacji orbit.

> **Twierdzenie** (Becker, Kechris) Jeśli $G$ jest domkniętą podgrupą $Sym(\omega)$, a $X$ jest $G$-przestrzenią polską, to relacja orbit na $X$ dopuszcza klasyfikację przez przeliczalne modele.

Z drugiej strony wiadomo, że nie wszystkie relacje orbit można sklasyfikować przez przeliczalne modele. W klasie takich relacji znajdują się wszystkie relacje powstałe w wyniku tzw. *działań turbulentych*. Takie działania wprowadzone są w monografii G. Hjortha *Classification and orbit equivalence relations*, [12].

W tej książce G.Hjorth koncentruje się na następującym pytaniu:

> Które spośród relacji orbit są klasyfikowalne przez przeliczalne modele?

Jako podstawowe narzędzie zostaje tu wprowadzona metoda uogólnionej *analizy Scotta*. Hjorth dowodzi, że każda relacja orbit posiadająca zupełny system niezmienników Hjorth-Scotta dopuszcza klasyfikcję przez przeliczalne modele, a dla działań tzw. *GE*-grup warunki te są równoważne.

Z tą tematyką związana jest praca [H1]. Uogólnione zostają tu te własności działań domkniętych grup permutacji, dzięki którym system niezmienników Hjorth-Scotta dla indukowanych przez nie relacji orbit jest zupełny. Głównym wynikiem tej pracy jest sformułowanie prostego warunku, który jest równoważny zupełności systemu niezmienników Hjortha-Scotta.

W swojej monografii [12] Hjorth przedstawił dwie wersje uogólnionej analizy Scotta. Drugą z nich wykorzystałam w pracy [H2] do badania niektórych zagadnień efektywnej niezmienniczej teorii mnogości. Przedmiot jej rozważań stanowią *przestrzenie rekurencyjnie prezentowalne* Mówimy, że przestrzeń polska $(X, d)$ jest *rekurencyjnie prezentowalna*, jeśli posiada ona *rekurencyjną prezentację*, tj. taki ciąg $(r_i)_{i\in\omega}$, którego elementy tworzą gęsty podzbiór $X$ oraz $(i, j, k, m)$-relacje

$$d(r_i, r_j) \leq \frac{m}{k+1} \text{ i } d(r_i, r_j) < \frac{m}{k+1}$$

są rekurencyjne. Klasa rekurencyjnie prezentowalnych przestrzeni obejmuje $\omega$, przestrzeń Baire'a $\mathcal{N}$, przestrzeń Cantora $\mathcal{C}$, liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$ i jest zamknięta na skończone produkty.

W pracy [H2] koncentruję się na problemie, który w uproszczonej postaci może być sformułowany następująco:

> Załóżmy, że $G$ jest rekurencyjnie prezentowalną grupą polską, $X$ - rekurencyjnie prezentowalną polską $G$-przestrzenią oraz działanie grupy $G$ na $X$ jest funkcją rekurencyjną. W jakim stopniu orbita $G \cdot x$ elementu $x \in X$ jest określona przez rodzinę zawierających $x$ niezmienniczych zbiorów małej złożoności (hiperarytmetycznych)?

Na mocy klasycznych rezultatów Rylla-Nardzewskiego i Millera, każda orbita względem działania ciągłego i ogólnie - borelowskiego jest zbiorem borelowskim. Sami udowodnił w [20], że relacja orbit jest borelowska wtedy i tylko wtedy, gdy borelowski rząd wszystkich jej orbit jest ograniczony przez pewną przeliczalną liczbę porządkową. Gdy relacja orbit nie jest borelowska, naturalne stają się pytania o opis orbit małego rzędu borelowskiego oraz o warunki określające możliwość oddzielenia dwu orbit takim zbiorem. W pracy [H3] analizuję te zagadnienia dla relacji sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$ automorfizmów porządkowych zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Na mocy rezultatów Foremana, relacja ta jest zupełną relacją analityczną. W moich badaniach wykorzystuję $\iota$-zanurzenia, narzędzie wprowadzone przez Beckera (w pracy [2]) jako uogólnienie teoriomodelowego pojęcia *elementarnego zanurzenia.*

Z $\iota$-zanurzeniami związane są również wyniki pracy [H4]. Rozważam w niej ciągłe działania domkniętych grup permutacji. Klasycznym przykładem takiego działania jest *działanie logiczne* grupy symetrii $Sym(\omega)$ na przestrzeni przeliczalnych struktur pewnego przeliczalnego języka. Przykład ten motywuje do definiowania pojęć teoriomodelowych w naszym ogólniejszym kontekście. W pracy [H4] wprowadzam pojęcie *kompanionu* pewnych niezmienniczych $G_\delta$-zbiorów. Mimo tego, że jest to pojęcie słabsze od swojego teoriomodelowego odpowiednika, okazało się, że własności zbliżone mają kompaniony, które są orbitami. Główne twierdzenie opisuje warunek wystarczający do istnienia takiego kompanionu.

### C.1 UOGÓLNIONA ANALIZA SCOTTA I DZIAŁANIA OSTATECZNIE OTWARTE

Grupy topologiczne posiadające bazę otoczeń jedności w postaci rodziny otwartych podgrup nazywają się *grupami niearchimedesowymi.* Jeśli grupa polska $G$ jest grupą niearchimedesową, wówczas dowolna polska $G$-przestrzeń $X$ posiada bazę, której każdy element jest niezmienniczy względem pewnej otwartej podgrupy grupy $G$. Ponadto działanie $G$ na przestrzeni $X$ ma następującą własność:

($\Xi$) Dla dowolnego $x \in X$ i zbioru otwartego $W \subseteq G$, fragment $Wx$ orbity elementu $x$ zawiera podzbiór niezmienniczy względem pewnej otwartej podgrupy.

Polskie grupy niearchimedesowe są izomorficzne z domkniętymi podgrupami $Sym(\omega)$ ( Tw. 1.5.1 w [4]). To wraz z własnością ($\Xi$) powoduje, że indukowane przez nie relacje orbit są klasyfikowalne przez przeliczalne modele. Ponieważ klasa relacji orbit dopuszczająca klasyfikację przez przeliczalne modele jest istotnie szersza, naturalny wydawał się pomysł osłabienia warunku ($\Xi$). Idea ta została zrealizowana w pracy [H1].

Niech $G$ będzie grupą polską a $X$ będzie polską $G$-przestrzenią.

**Definicja** *Niech $U \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym, zaś $V \subseteq G$ niech będzie otwartym symetrycznym otoczeniem jedności $1_G$. Dla każdego $A \subseteq X$ definujemy przez indukcję wstępujący ciąg $(V_U^{[n]}A)_{n\in\omega}$ zbiorów:*

$$\begin{cases} V_U^{[0]}A &= A \cap U, \\ V_U^{[n+1]}A &= V(V_U^{[n]}A) \cap U. \end{cases}$$

*Zbiór $V_U A = \bigcup_{n\in\omega} V_U^{[n]}A$ nazywamy lokalnym $V_U$-nasyceniem $A$. Dla każdego $x \in X$ lokalne nasycenie $V_U\{x\}$ zbioru $\{x\}$ oznaczamy krótko $V_U x$ i nazywamy lokalną $V_U$-orbitą elementu $x$.*

Jak łatwo zauważyć, lokalne nasycenia zbiorów borelowskich są zbiorami analitycznymi. Pokazuję, że lokalne orbity elementów przestrzeni $X$ są, podobnie jak zwykłe, zbiorami borelowskimi.

Wraz z nową koncepcją nasycenia wprowadzam nowe pojęcie niezmienniczości - *lokalną niezmienniczość*.

**Defnicja** *Niech $U \subseteq X$ będzie zbiorem otwartym, zaś $V \subseteq G$ niech będzie otwartym symetrycznym otoczeniem jedności $1_G$. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest lokalnie $V_U$-niezmienniczy jeśli $V_U A = A \cap U$.*

Zauważmy, że dla $U$ i $V$, jak w powyższej definicji, wszystkie zbiory zawierające $U$ oraz wszystkie zbiory rozłączne z $U$ są lokalnie $V_U$-niezmiennicze, zaś rodzina wszystkich lokalnie $V_U$-niezmienniczych podzbiorów przestrzeni $X$ tworzy zupełną algebrę Boole'a. Jeśli w sformułowaniu własności ($\Xi$) działań domkniętych grup permutacji zastąpimy występujące tam pojęcia ich lokalnymi odpowiednikami, otrzymamy definicję *działania ostatecznie otwartego.*

**Definicja** *Ciągłe działanie grupy polskiej $G$ na przestrzeni polskiej $X$ nazywamy ostatecznie otwartym, jeśli dla dowolnego $x \in X$ oraz otwartego symetrycznego otoczenia jedności $W \subseteq G$ istnieją zbiór otwarty $U \subseteq X$ oraz otwarte symetryczne otoczenie jedności $V \subseteq G$ takie, że $x \in U$ oraz $V_U x \subseteq W x$.*

Oczywiście każda grupa polska posiada działania ostatecznie otwarte, np. działanie na sobie przez sprzężenie. Ponieważ własność definiująca działania ostatecznie otwarte jest słabsza niż własność ($\Xi$), zatem wszystkie działania domkniętych grup permutacji są ostatecznie otwarte. Pokazuję, że implikacja odwrotna jest jednak nieprawdziwa, tzn. istnieją grupy, których wszystkie ciągłe działania są ostatecznie otwarte mimo, że grupy te nie są izomorficzne z domkniętymi podgrupami $Sym(\omega)$.

**Twierdzenie 4.1.1** (Proposition 2.8, [H1]) *Wszystkie ciągłe działania grupy $(\mathbb{R}, +)$ na przestrzeniach polskich są ostatecznie otwarte.*

Głównym wynikiem pracy [H1] jest twierdzenie pokazujące, że klasa relacji orbit indukowanych przez działania ostatecznie otwarte pokrywa się z klasą relacji, które są w sposób zupełny klasyfikowalne przy użyciu uogólnionej analizy Scotta.

Uogólniona analiza Scotta jest istotną metodą badania relacji orbit. Została ona wprowadzona przez Hjortha i w sposób kompletny opisana w [12]. Jej głównym narzędziem są dziedzicznie przeliczalne niezmienniki $\phi_\alpha(x, U, V)$, $U \subseteq_{open} X$, $V \subseteq_{open} G$, opowiadające charakterystykom Scotta ([12], Chapter 6.2).

Niech $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ będzie przeliczlną bazą symetrycznych otoczeń jedności, a $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ niech będzie przeliczlną bazą $X$.

**Definicja** (Hjorth) Niech $x \in X$. Dla każdego $U \in \mathcal{U}$ i $V \in \mathcal{V}$ definiujemy zbiór $\phi_\alpha(x, U, V)$ przez jednoczesną indukcję względem $\alpha$:

$$\begin{array}{ll} \phi_1(x,U,V) & = \{l : \ U_l \in \mathcal{U}, V_U x \cap U_l \neq \emptyset\}, \\ \phi_{\alpha+1}(x,U,V) & = \{\langle \phi_\alpha(x', U_n, V_m), n, m\rangle : x' \in V_U x, U_n \subseteq U, V_m \subseteq V\}, \\ \phi_\lambda(x,U,V) & = \{\langle \phi_\alpha(x,U,V), \alpha\rangle : \alpha < \lambda\} \text{ dla } \lambda \text{ granicznej .} \end{array}$$

Jedną z podstawowych własności niezmienników Hjortha-Scotta wyraża następujące zdanie.

**Lemat** (Hjorth) Dla każdego $x \in X$ istnieje $\gamma < \omega_1$ taka, że dla wszystkich $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ i $x', x'' \in Gx$ mamy

$$(\exists \alpha < \omega_1)\big(\phi_\alpha(x', U, V) \neq \phi_\alpha(x'', U, V)\big) \Rightarrow \big(\phi_\gamma(x', U, V) \neq \phi_\gamma(x'', U, V)\big).$$

Dla każdego $x \in X$ najmniejszą liczbę porządkową $\gamma$ posiadającą własność opisaną powyższym lematem oznaczamy symbolem $\gamma^\star(x)$. Liczba ta stanowi odpowiednik rangi Scotta.

W pracy [H1] posługuję się nie samymi niezmiennikami $\phi_\alpha(x, U, V)$, ale określonymi przez nie zbiorami

$$B_\alpha(x, U, V) = \{y \in X : \phi_\alpha(y, U, V) = \phi_\alpha(x, U, V)\}.$$

W tych terminach definicja zupełności może być sformułowana następująco.

**Definicja** *Niech $G$ będzie grupą polską, a $X$ polską $G$-przestrzenią. System niezmienników Hjortha-Scotta dla indukowanej na $X$ relacji orbit jest* zupełny, *gdy dla każdego elementu $x \in X$ prawdziwa jest równość $B_{\gamma^\star(x)+2}(x, X, G) = Gx$.*

Jak wspomniałam we Wprowadzeniu, *zupełność systemu niezmienników Hjortha-Scotta implikuje klasyfikowalność przez przeliczalne modele* (Lemma 6.30, [12]). Hjorth udowodnił, że system uogólnionych niezmienników Scotta jest zupełny dla wszystkich relacji orbit indukowanych przez ciągłe działanie grupy $Sym(\omega)$. Pozostaje to prawdą dla wszystkich domkniętych grup permutacji, ale w przypadku działania dowolnych grup polskich systemy niezmienników Hjortha mogą nie być zupełne. W ogólnej sytuacji prawdziwe jest jedynie następujące zdanie.

**Twierdzenie** (Hjorth) Dla każdych $x \in X$, $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ i liczby porządkowej $\alpha \geq \gamma^\star(x) + 2$ zachodzi równość:

$$B_{\gamma^\star(x)+2}(x, U, V) = B_\alpha(x, U, V).$$

W szczególności, $B_{\gamma^\star(x)+2}(x, X, G) = B_\alpha(x, X, G)$.

Jeśli ustalimy dowolny element $x \in X$ i rozszerzymy topologię przestrzeni $X$ przez powiększenie bazy o rodzinę zbiorów postaci $B_\beta(x, U, V)$, $\beta < \gamma^\star(x) + 2$, wtedy na mocy Lematu 6.32 z [12] otrzymamy topologię wyznaczającą taką samą rodzinę zbiorów borelowskich jak topologia wyjściowa. Ponadto zgodnie z Lematem 6.33, [12], $B_{\gamma^\star(x)+2}(x, X, G)$ z topologią podprzestrzeni, oznaczoną jako $t^x_{\gamma^\star(x)+2}$, jest polską $G$-przestrzenią (w pracy [18] pokazuję, że pozostaje to prawdą, gdy $\gamma^\star(x) + 2$ zastąpimy dowolną liczbą porządkową $\alpha$, otrzymując toplogię $t^x_\alpha$). Topologie $t^x_{\gamma^\star(x)+2}$ występują w sformułowaniu następującego twierdzenia, które jest głównym wynikiem pracy [H1].

**Twierdzenie 4.1.2.** (Theorem 3.7, [H1]) *Niech $G$ będzie grupą polską, a $X$ będzie polską $G$-przestrzenią. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *Działanie $G$ na $X$ jest ostatecznie otwarte.*

(2) *Dla dowolnychych $x \in X$, $V \in \mathcal{V}$, $U \in \mathcal{U}$, liczby porządkowej $\alpha \geq 1$ i każdego lokalnie $V_U$-niezmienniczego zbioru borelowskiego $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ jeśli $x \in A$, to $B_\alpha(x, U, V) \subseteq A$.*

(3) *Dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $Gx = B_{\gamma^\star(x)+2}(x, X, G)$.*

(4) *Dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $G \to Gx$: $g \to gx$ jest otwarte względem topologii $t^x_{\gamma^\star(x)+2}$.*

Jądro powyższego twierdzenia stanowi równoważność warunków (1) i (3). Pozwala ona dość skomplikowaną własność *zupełności systemu niezmienników Hjortha-Scotta* zastąpić znacznie prostszym warunkiem *ostatecznej otwartości* działania. Punkt (4) uzasadnia wybór terminu *ostateczna otwartość*.

W dowodzie Twierdzenia 4.1.2 posługuję się następującą charakteryzacją zbiorów postaci $\{B_\alpha(x, U, V) : x \in U\}$.

**Twierdzenie 4.1.3.** (Proposition 3.3, [H1]) *Dla każdych $U \in \mathcal{U}$, $x \in U$ i $V \in \mathcal{V}$*

*prawdziwe są następujące równości:*

$$
\begin{aligned}
B_1(x,U,V) &= \bigcap_n \{V_U U_n : V_U x \cap U_n \neq \emptyset\} \cap \bigcap_n \{X \setminus V_U U_n :\ V_U x \cap U_n = \emptyset\},\\
B_{\alpha+1}(x,U,V) &= \bigcap_{n,m} \{V_U B_\alpha(y,U_n,V_m) : y \in U_n, V_U x \cap B_\alpha(y,U_n,V_m) \neq \emptyset\} \cap \\
&\cap \bigcap_{n,m} \{X \setminus V_U B_\alpha(y,U_n,V_m) : y \in U_n, V_U x \cap B_\alpha(y,U_n,V_m) = \emptyset\},\\
B_\lambda(x,U,V) &= \bigcap \{B_\alpha(x,U,V) : \alpha < \lambda\}, \text{ dla } \lambda \text{ granicznej .}
\end{aligned}
$$

Z Twierdzenia 4.1.3 wynika, że dla dowolnych $U \in \mathcal{U}$, $x \in U$ i $V \in \mathcal{V}$ rodzina $\{B_\alpha(x,U,V) : x \in U\}$ tworzy partycję zbioru $U$ na lokalnie $V_U$-niezmiennicze zbiory borelowskie. Ponadto, każda orbita zawarta w $B_\alpha(x,U,V)$ jest w tym zbiorze gęsta względem topologii $t^x_\alpha$. Zatem własności tej partycji są takie, jak własności *kanonicznej partycji* zdefiniowanej przez Beckera w pracy [2][1].

## C.2 DZIAŁANIA GRUP POLSKICH I ZBIORY DOPUSZCZALNE

Teoria rekursji pozostaje w naturalnym związku z teorią *zbiorów dopuszczalnych.* Zbiór $\mathbb{A}$ nazywamy *dopuszczalnym*, jeśli jest on modelem dla systemu aksjomatów KPU, w którym brak jest aksjomatu zbioru potęgowego, a aksjomaty oddzielania i podstawiania są ograniczone do $\Delta_0$-formuł. Modele te są rozumiane jako dwusortowe struktury pewnego języka $L$ zawierającego symbole $\emptyset, \in$, w których jeden sort stanowią atomy (ang. urelements) tworzące zwykle strukturę pierwszego rzędu względem symboli z $L \setminus \{\emptyset, \in\}$. Wysokością zbioru dopuszczalnego $\mathbb{A}$ nazywamy najmniejszą liczbę porządkową, która nie należy do $\mathbb{A}$. Liczbę tę oznaczamy symbolem $o(\mathbb{A})$. Zatem w $\mathbb{A}$ spełniony jest Aksjomat Nieskończoności, gdy $o(\mathbb{A}) > \omega$

**Definicja** *Niech $G$ będzie rekurencyjnie prezentowalną grupą polską z kanoniczną bazą $\{V_m : m \in \omega\}$, zaś $X$ będzie rekurencyjnie prezentowalną $G$-przestrzenią z bazą $\{U_n : n \in \omega\}$. Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym i $o(\mathbb{A}) > \omega$.*

1. *Element $x \in X$ jest kodowalny w $\mathbb{A}$, jeśli zbiór $\{n : x \in U_n\}$ jest elementem $\mathbb{A}$.*
2. *Grupa $G$ jest kodowalna w $\mathbb{A}$, jeśli relacje $\{(k,l,n) : V_k V_l \subseteq V_n\}$ oraz $\{(k,l) : V_k^{-1} \subseteq V_l\}$ należą do $\mathbb{A}$.*
3. *Działanie $G$ na $X$ jest kodowalne w $\mathbb{A}$, jeśli relacja $\{(k,i,j) : V_k U_i \subseteq U_j\}$ jest elementem $\mathbb{A}$.*

[1] Becker pokazał, że istnieje jednoznacznie określona partycja przestrzeni $X$, $X = \bigcup\{Y_t : t \in T\}$, na niezmiennicze $G_\delta$-zbiory $Y_t$ taka, że każda $G$-orbita zawarta w $Y_t$ jest gęsta w $Y_t$.

Związki pomiędzy kodowalnością a efektywnością są dobrze znane i opisane w wielu książkach z deskryptywnej teorii mnogości, np. [1].

W sytuacji działania logicznego grupy $Sym(\omega)$ na przestrzeni struktur $X_L$, określone powyższą definicją kodowanie jest naturalne i dobrze zrozumiałe. Zauważyłam, że następujące twierdzenie J.Barwise'a i M.Nadela (udowodnione w latach 70-ych) można zinterpretować w powyższych terminach.

> **Twierdzenie** ([1], Corollary 7.2). Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym, $L \in \mathbb{A}$ będzie przeliczalnym językiem pierwszego rzędu i $\mathfrak{M}$ będzie $L$-strukturą w $\mathbb{A}$. Wtedy dla dowolnej $L$-struktury $\mathfrak{N}$, jeśli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ spełniają te same zdania z przeliczalnego fragmentu $L_{\mathbb{A}}$, to spełniają one te same zdania kwantyfikatorowego rzędu $\alpha \leq o(\mathbb{A})$.

W istocie jest to konkretne stwierdzenie dotyczące następującego ogólnego pytania.

> *Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym. Niech $G$, $X$ oraz $x \in X$ będą kodowalne w $\mathbb{A}$. W jakim stopniu $G$-orbita elementu $x$ jest wyznaczona przez niezmiennicze zbiory borelowskie, których kody borelowskie należą do $\mathbb{A}$?*

W pracy [H2] odpowiadam na to pytanie. Badam również kilka pokrewnych zagadnień, które w naturalny sposób powstają, gdy rozważania dotyczące działania grup polskich przenosimy na grunt efektywnej deskryptywnej teorii mnogości.

W [H2] posługuję się drugą wersją analizy Hjortha-Scotta. Kluczową rolę pełnią w niej niesymetryczne relacje $\leq_\alpha$ zdefiniowane następująco.

> **Definicja** (Hjorth) Dla $x, y \in X$ oraz bazowych otwartych zbiorów $V, W \subseteq G$ przyjmujemy:
>
> $(y, V) \leq_1 (x, W)$, jeśli $\overline{V \cdot y} \subseteq \overline{W \cdot x}$
>
> $(y, V) \leq_{\alpha+1} (x, W)$, jeśli dla każdego bazowego zbioru otwartego $V' \subseteq V$ istnieje bazowy zbiór otwarty $W' \subseteq W$ taki, że $(x, W') \leq_\alpha (y, V')$
>
> $(y, V) \leq_\lambda (x, W)$, jeśli $(y, V) \leq_\alpha (x, W)$ dla każdej liczby $\alpha < \lambda$, gdy $\lambda$ jest graniczna .

W [12] pokazano, że relacje $\leq_\alpha$ są przechodnie oraz $(y, V) \leq_\alpha (x, W)$ implikuje $(y, V) \leq_\beta (x, W)$, gdy $\beta \leq \alpha$. Ponadto dla każdej liczby porządkowej $\alpha$ i każdego elementu $x' \in G \cdot x$ zachodzi równość: $(x, G) \leq_\alpha (x', G)$. Ważną własność tych relacji wyraża następujące zdanie.

> **Lemat** (Hjorth) Niech $x, y \in X$, $V, W \subseteq G$ będą bazowymi zbiorami otwartymi, zaś $\alpha$ będzie przeliczalną liczbą porządkową taką, że $(y, V) \leq_\alpha (x, W)$. Wówczas dla dowolnego $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-zbioru $B \subseteq X$, jeśli $x$ należy do transformaty Vaughta $B^{*W}$, to $y \in B^{*V}$.

$*$-Transformatę Vaughta definujemy następująco:

$B^{*W} = \{x \in X : \{g \in W : gx \in B\}$ jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w zbiorze $W\}$.

Hjorth udowodnił w [12], że jeśli $\{V_n : n \in \omega\}$ jest bazą $G$, wówczas relacja $\{(y, x, n, k) : (y, V_k) \leq_\alpha (x, V_n)\}$ jest borelowskim podzbiorem $X^2 \times \omega^2$, dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$.

W pracy [H2] dowodzę następującej efektywnej wersji tej własności.

**Twierdzenie 4.2.1.** (Lemma 1, [H2]) *Niech $X$, $G$ będą rekurencyjnie prezentowalne oraz $\{V_n : n \in \omega\}$ będzie kanoniczną bazą $G$. Niech operacje grupowe i działanie $G$ na $X$ będą hiperarytmetyczne. Wówczas dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1^{CK}$ relacja*

$$H_\alpha = \{(y, x, n, k) : (y, V_k) \leq_\alpha (x, V_n)\}$$

*jest hiperarytmetyczna.*

Wykorzystując ten fakt, formułuję następującą odpowiedź na pytanie postawione we Wprowadzeniu.

**Twierdzenie 4.2.2.** (Theorem 2, [H2]) *Załóżmy, że $G$, $X$ są rekurencyjnie prezentowalne, operacje grupowe $G$ i działanie $G$ na $X$ są hiperarytmetyczne. Jeśli $x, y \in X$, $x$ jest hiperarytmetyczny oraz $x, y$ należą do tych samych hiperarytmetycznych zbiorów niezmienniczych, to dla każdej liczby porządkowej $\alpha \leq \omega_1^{CK}(\zeta)$ $x, y$ należą do tych samych niezmienniczych zbiorów borelowskich, których rząd borelowski jest równy $\alpha$.*

Przyjmując założenia o kodowalności w zbiorze dopuszczalnym $\mathbb{A}$ działań grupowych grupy $G$ oraz działania $G$ na przestrzeni $X$, otrzymuję odpowiedź na wersję tego pytania podaną na początku części C.2.

**Twierdzenie 4.2.3.** (Theorem 4, [H2]) *Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym i $o(\mathbb{A}) > \omega$. Niech $G$, $X$ oraz $x \in X$ będą kodowalne w $\mathbb{A}$. Wówczas dla dowolnego elementu $y \in X$, jeśli $x$ i $y$ są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich, których kody borelowskie należą do $\mathbb{A}$, to dla każdej liczby porządkowej $\alpha \leq o(\mathbb{A})$, elementy $x, y$ należą do tych samych niezmienniczych zbiorów borelowskiego rzędu $\alpha$.*

W przypadku zbiorów dopuszczalnych spełniających Aksjomat Nieskończoności, powyższe twierdzenie rozszerza rezultat Barwise'a i Nadela na działania *dowolnych* grup polskich.

Kilka wersji powyżego twierdzenia dla przypadku domkniętych grup permutacji przedstawiłam w preprincie [17]. Dowody tych twierdzeń są bardzo technicznymi modyfikacjami rozumowań Nadela z pracy [19]. W ciągu kilku lat udało mi się opracować i zrealizować nowe podejście, które zaowocowało wynikami zaprezentowanymi w pracy [H2]. Podejście to z jednej strony eliminuje ograniczenie rozważań do domkniętych grup permutacji, z drugiej zaś czyni rozumowania bardziej przejrzystymi i naturalnymi.

### C.3 ZŁOŻONOŚĆ KLAS SPRZĘŻENIA W GRUPIE $A(\mathbb{Q})$.

Wyniki przedstawione w pracach [H1-H2] odnoszą się do ogólnej sytuacji działania dowolnej grupy polskiej na dowolnej przestrzeni polskiej. W pracach [H3-H4] rozważam działania z dodatkowymi warunkami lub zupełnie konkretne przypadki, uzyskując rezultaty bardziej szczegółowe.

W pracy [H3] analizuję, interesujący z punktu widzenia algebry topologicznej, przypadek działania grupy polskiej na zbiorze swoich elementów przez sprzężenie. Powstająca w tej sytuacji relacja orbit jest relacją sprzężenia, a same orbity - są klasami sprzężenia. Ważnym przykładem takiej relacji jest relacja sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$, wszystkich zachowujących porządek bijekcji zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. Relacja ta posiada ciekawą strukturę algebraiczną i od dawna stanowi przedmiot badań wielu matematyków, m.in. J.Trussa, M.Foremana. Praca [H3] poświęcona jest złożoności klas sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$. Ponieważ grupa ta jest domkniętą podgrupą grupy $Sym(\omega)$, dlatego moje rozważania rozpoczynam od analizy relacji sprzężenia w $Sym(\omega)$.

Wiadomo, że relacja sprzężenia w grupie $Sym(\omega)$ jest gładka, a więc i borelowska. Klasę sprzężenia dowolnej permutacji $\sigma$ określa funkcja $f_\sigma : \omega \longrightarrow \omega \cup \{\omega\}$ zwana *typem cykli* i zdefiniowana następująco:

$$f_\sigma(n) = \begin{cases} \text{liczba nieskończonych cykli w } \sigma, & \text{dla } n = 0 \\ \text{liczba cykli długości } n \text{ w } \sigma, & \text{dla } n > 0. \end{cases}$$

Dwie permutacje są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy ich typy cykli są równe. Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem wszystkich permutacji $\sigma$ takich, że $f_\sigma(n) = 0$, dla prawie wszystkich $n \in \omega$. Przedstawione w pracy [H3] wyniki dotyczące $Sym(\omega)$ podsumowuję następującym twierdzeniem zawierającym zupełny opis złożoności klas sprzężenia.

**Twierdzenie 4.3.1.** ((Theorem 1.8, [H3]) *Klasa sprzężenia dowolnej permutacji $\rho \in Sym(\omega)$ jest $\Pi^0_3$-zbiorem. Ponadto, klasa sprzężenia $\rho$ jest*
(1) *$G_\delta$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:*
*(a) $f_\rho(0) = 0$ lub (b) $f_\rho(0) = 1$ i $f \in \mathcal{S}$;*
(2) *zbiorem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $n > 0$ taka, że $f_\rho(n) = \omega$ i $f_\rho(k) = 0$, dla $k \neq n$;*
(3) *$F_\sigma$-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho \in \mathcal{S}$, $f_\rho(0) = 0$ i istnieje $n \in \omega$ taka, że $f_\rho(n) = \omega$ i $f_\rho(k) < \omega$, dla $k \neq n$.*

Relacja sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$ jest bardziej skomplikowana. Na mocy wspomnianych we Wprowadzeniu rezultatów Foremana i Samiego, jest ona zupełną relacją analityczną i posiada klasy sprzężenia o dowolnie dużej złożoności borelowskiej. Opisuje się je przy użyciu pojęcia *orbitalu*.

Niech $f \in A(\mathbb{Q})$. Każdej liczbie wymiernej $x$ można przypisać zbiór

$$\{q \in \mathbf{Q} : (\exists m, n \in \mathbf{Z})(f^n(x) \leq q \leq f^m(x))\},$$

który nazywamy *orbitalem* $f$ wyznaczonym przez $x$, oraz liczbę $\wp_f(x) \in \{-1, 0, +1\}$, określającą znak (nie)równości pomiędzy $f(x)$ i $x$, zwaną *parzystością* $x$. Każdy orbital jest wyznaczony przez dowolny swój element i jest przedziałem w zbiorze $\mathbb{Q}$, zaś funkcja parzystości jest stała na każdym orbitalu (tą stałą wartość nazywamy parzystością orbitalu). Rodzina $\mathcal{O}_f$, wszystkich orbitali $f$, tworzy partycję zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i jest liniowo uporządkowana przez naturalny częściowy porządek $\preceq$ na rodzinie przedziałów. Na mocy klasycznego wyniku Schreiera i Ulama,

> *$f$ i $g$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy porządki $(\mathcal{O}_f, \preceq)$ i $(\mathcal{O}_g, \preceq)$ są izomorficzne przez izomorfizm zachowujący parzystość orbitali.*

Truss podał w [21] następującą charakteryzację *automorfizmów generycznych.*

*Klasa sprzężenia automorfizmu $f \in A(\mathbb{Q})$ zbiorem drugiej kategorii Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in \{-1, 0, +1\}$ rodzina $\mathcal{O}_f^i$ orbitali przystości $i$ jest gęsta i nieograniczona w $\mathcal{O}_f$.*

Głównym wnioskiem przedstawionych w pracy [H3] wyników dotyczących $A(\mathbb{Q})$ jest opis klas sprzężenia małej złożoności w $A(\mathbb{Q})$.

**Twierdzenie 4.3.2.** (Theorem 2.8, [H3])
(1) *Automorfizm trywialny jest jedynym auomorfizmem, którego klasa sprzężenia jest* $\mathbf{F}_\sigma$*-zbiorem.*
(2) *Klasa sprzężenia $f$ jest* $\mathbf{G}_\delta$*-zbiorem wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest automorfizmem generycznym lub istnieje skończona partycja $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ rodziny $\mathcal{O}_f$ taka, że dla każdego $k < n$:*
(a) $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k$ *jest odcinkiem początkowym* $(\mathcal{O}_f, \preceq_f)$;
(b)$\{i : A_k \cap \mathcal{O}_f^i \neq \emptyset\} \setminus \{i : A_{k+1} \cap \mathcal{O}_f^i \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ *oraz*
$\{i : A_{k+1} \cap \mathcal{O}_f^i \neq \emptyset\} \setminus \{i : A_k \cap \mathcal{O}_f^i \neq \emptyset\} \neq \emptyset$;
(c) *spełniony jest jeden z następujących warunków:*
(i) $A_k$ *składa się z jednego orbitalu;*
(ii) $A_k$ *jest zawarty w* $\mathcal{O}_f^0$ *i nie ma końców;*
(iii) *istnieją różne* $i, j \in \{-1, 0, +1\}$ *takie, że* $A_k \subseteq \mathcal{O}_f^i \cup \mathcal{O}_f^j$
*i każdy ze zbiorów* $\mathcal{O}_f^i, \mathcal{O}_f^j$ *jest gęsty i nieograniczony w* $A_k$.

Podstawowym narzędziem wykorzystanym w tym twierdzeniu jest charakteryzacja *$\iota$-zanurzalności*, własności wprowadzonej przez H.Beckera (zdefiniowanej niżej). Moja charakteryzacja (Theorem 2.2, [H3]) może być również rozpatrywana jako warunek konieczny do tego, by dwie klasy sprzężenia można było oddzielić zbiorem typu $G_\delta$. Wykorzystuję ją w dowodach wielu stwierdzeń opisujących relację sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$. Można ją uznać za główny wynik pracy.

Metoda $\iota$-zanurzeń Beckera (wprowadzona w pracach [2] i [3]) bazuje na następującej definicji.

**Definicja** (Becker) Niech $G$ będzie grupą polską, a $X$ będzie $G$-przestrzenią polską. Niech $(g_n)$ będzie ciągiem elementów grupy $G$, a $x$ i $y$ będą elementami przestrzeni $X$.

(1) $(g_n)$ nazywamy $\iota$-ciągiem jeśli jest on ciągiem Cauchy'ego względem pewnej (równ. każdej) lewostronnie niezmienniczej metryki zgodnej.

(2) $(g_n)$ nazywamy $\iota$-zanurzeniem $x$ w $y$ jeśli $(g_n)$ jest $\iota$-ciągiem oraz $\lim_{n\to\infty} g_n x = y$. Mówimy, że $x$ zanurza się w $y$, gdy istnieje $\iota$-zanurzenie $x$ w $y$.

Jeśli $x$ zanurza się w $y$, to $x'$ zanurza się w $y'$, dla dowolnych $x' \in Gx$ i $y' \in Gy$. Zatem *$\iota$-zanurzalność* jest relacją na zbiorze orbit. Becker dowodzi, że jeśli orbitę $Gy$ można oddzielić zbiorem $G_\delta$ od orbity $Gx$, to $x$ nie zanurza się w $y$. A zatem warunek opisujący kiedy $x$ nie zanurza się w $y$ jest konieczny do tego, by orbitę $Gy$ można było oddzielić od orbity $Gx$.

Główne twierdzenie (Theorem 2.2) określa warunek konieczny i dostateczny do istnienia $\iota$-zanurzenia pomiędzy parą automorfizmów. Mimo tego, że sformułowanie jest dość skomplikowane, można je efektywnie stosować. Część wyników pracy [H3] formułuję w języku $\iota$-zanurzeń. W szczególności pokazuję, że o ile w przypadku sprzężenia w grupie $Sym(\omega)$ brak możliwości $\iota$-zanurzenia jednej orbity w drugą jest warunkiem nie tylko koniecznym, ale i dostatecznym do możliwości oddzielenia drugiej orbity od pierwszej $G_\delta$-zbiorem, to w grupie $A(\mathbb{Q})$ jest to jedynie warunek konieczny.

Ciekawą różnicę między własnościami $\iota$-zanurzeń w obu grupach obserwuję także w odniesieniu do zbiorów postaci $Emb(x) = \{y : x \text{ zanurza się w } y\}$. W grupie $Sym(\omega)$ każdy taki zbiór jest borelowski. Wykorzystując charakteryzację przeliczalnych liczb dopuszczalnych, podaną przez H. Friedmana w pracy [9], konstruuję przykład automorfizmu $f \in A(\mathbb{Q})$, dla którego $Emb(f)$ nie jest zbiorem borelowskim.

### C.4 $\mathbf{G_\delta}$-KAWAŁKI KANONICZNYCH PARTYCJI

Rozważamy ciągłe działania domkniętych grup permutacji. Poniżej $G$ oznacza taką właśnie grupę, zaś $\mathcal{N}^G$ - jej standardową bazą, której elementami są z lewostronne warstwy stabilizatorów skończonych podzbiorów $\omega$. Becker wprowadził w pracy [3] następujące pojęcie.

**Definicja** (Becker) Niech $G < Sym(\omega)$ będzie podgrupą domkniętą, a $X$ przestrzenią polską. Toplogia $t$ na $X$ jest *miła* (ang. *nice*) dla $G$-przestrzeni $(\langle X, \tau\rangle, G)$ jeśli spełnione są następujące warunki:
(a) $t$ jest topologią polską bogatszą niż $\tau$ i działanie $G$ na $X$ pozostaje ciągłe względem $t$.
(b) Istnieje baza $\mathcal{B}$ topologii $t$ posiadająca następujące własności:
(i) $\mathcal{B}$ jest przeliczalna;
(ii) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$;
(iii) dla dowolnego $B \in \mathcal{B}$, $X \setminus B \in \mathcal{B}$;

(iv) dla dowolnych $B \in \mathcal{B}$ i $u \in \mathcal{N}^G$, $B^{\star u} \in \mathcal{B}$;
(v) dla dowolnego $B \in \mathcal{B}$ istnieje podgrupa otwarta $H < G$ taka, że $B$ jest $H$-niezmiennicza.
Bazę spełniającą warunki (b) nazywamy *miłą* bazą.

Pojęcie miłych topologii dobrze ilustruje klasyczny przykład działania logicznego. Przypomnijmy krótko, że działaniem logicznym nazywamy naturalne działanie grupy permutacji $Sym(\omega)$ na zbiorze $2^\omega$ traktowanym jako rodzina $X_L$ przeliczalnych struktur pewnego przeliczalnego relacyjnego języka pierwszego rzędu $L$. Zbiór $X_L$ z odpowiednią topologią (produktową) $\tau$ tworzy polską $Sym(\omega)$-przestrzeń względem tego działania. Na zbiorze $X_L$ można określić inną naturalną topologię. Jeśli $F$ jest przeliczalnym fragmentem $L_{\omega_1\omega}$ (tzn. zawiera wszystkie formuły atomowe i jest domknięty na podformuły, spójniki Boole'owskie i kwantyfikatory), wówczas rodzina $\mathcal{B}_F = \{Mod(\phi, \bar{s}) : \phi \in F, \bar{s} \in \omega^{<\omega}\}$, gdzie $Mod(\phi, \bar{s}) = \{M \in X_L : M \models \phi[\bar{s}]\}$, generuje na $X_L$ topologię polską bogatszą niż $\tau$. Becker pokazał w [3], że topologia ta jest miła względem $\tau$, a rodzina $\mathcal{B}_F$ jest jej miłą bazą.

Becker udowodnił, że gdy $G$ jest domkniętą grupą permutacji, to każda $G$-przestrzeń polska $(\langle X, \tau\rangle, G)$ posiada miłą topologię. Stało się to podstawą jego podejścia do znanych hipotez dotyczących polskich G-przestrzeni w pracach [2] (gdzie miłe topologie pojawiały się niejawnie) i [3].

W poniższych rozważaniach przyjmuję, że $t$ jest ustaloną miłą topologią na $X$, a $\mathcal{B}$ jest jej ustaloną miłą bazą. W [H4] wprowadzam pojęcie *kompanionu*.

**Definicja** *Niech $X_0$ będzie niepustym niezmienniczym podzbiorem pewnego kawałka kanonicznej $\tau$-partycji przestrzeni $X$, $X = \bigcup\{Y_t : t \in T\}$, na niezmiennicze $G_\delta$-zbiory $Y_t$ takie, że każda orbita zawarta w $Y_t$ jest gęsta w $Y_t$. Niezmienniczy $\tau$-$G_\delta$-zbiór $X_1$ nazywamy* kompanionem *$X_0$ jeśli $\overline{X}_1 = \overline{X}_0$ względem topologii $\tau$ oraz każdy zbiór $B \in \mathcal{B}$ jest $\tau$-otwarty na $X_1$.*

Przykład działania logicznego stanowi również motywację dla mojej koncepcji *kompanionu*. Niech $F$ będzie zbiorem wszystkich formuł pierwszego rzędu. Niech $X_0$ będzie zbiorem wszystkich przeliczalnych modeli pewnej teorii $T$ zupełnej w stosunku do formuł uniwersalnych. Ponieważ każdy kawałek partycji kanonicznej przestrzeni $(X, \tau)$ jest zbiorem struktur, które spełniają te same uniwersalne/egzystencjalne formuły, wszystkie modele przeliczalne teorii $T_\forall$ tworzą kawałek partycji kanonicznej. Jeśli $X_1 \subset X_0$ jest zbiorem wszystkich przeliczalnych modeli pewnej $\forall\exists$-teorii $T^*$, to warunek, by każdy zbiór $B \in \mathcal{B}_F$ był $\tau$-otwarty na $X_1$, oznacza, że w klasie struktur należących do $X_1$ każda formuła pierwszego rzędu jest równoważna z formułą egzystencjalną. Określa to modelową zupełność teorii $T^*$. W tej sytuacji warunek $\overline{X}_0 = \overline{X}_1$

oznacza, że $T^*$ jest modelowym kompanionem teorii $T$. Ten przykład tłumaczy moją terminologię.

Warto zauważyć, że moja definicja kompanionu jest trochę słabsza i dlatego możliwe są sytuacje, gdy kawałek $X_0$ posiada wiele kompanionów (w teorii modeli każda teoria ma co najwyżej jeden kompanion). Oczywiste jest natomiast, że kawałek kanonicznej partycji może mieć nie więcej niż jeden kompanion, który jest orbitą. Co więcej, jeśli kawałek kanonicznej partycji zawiera orbitę, która jest $G_\delta$-zbiorem, to jest ona jego kompanionem względem wszystkich miłych topologii. Wynika to z następującej uwagi przedstawionej w pracy [H4].

**Twierdzenie 4.4.1.** (Proposition 1.4, [H4]) *Niech $X_1$ będzie $G_\delta$-podzbiorem $X$ takim, że $X_1 = Gx$, dla pewnego (każdego) $x \in X_1$. Wówczas każda miła topologia na $X$ jest równa $\tau$ na $X_1$.*

Twierdzenie to wysłowione w języku $\iota$-zanurzeń oznacza, że dla dowolnej miłej topologii $t$, każde $\iota$-zanurzenie na $X_1$ względem $\tau$ jest $\iota$-zanurzeniem względem $t$. Jest to uogólnienie twierdzenia Lindströma o modelowej zupełności teorii $\omega$-kategorycznych.

*Powyższe własności tłumaczą, dlaczego pytanie o to, kiedy kawałek kanonicznej partycji zawiera $G_\delta$-orbitę, jest dla nas zagadnieniem centralnym.*

Na początku rozważam zagadnienie istnienia kompanionu. W Sekcji 2 pracy [H4] pokazuję, że tu także moje pojęcie różni się od teoriomodelowego.

**Twierdzenie 4.4.2.** (Proposition 2.1, [H4]) *Każdy kawałek partycji kanonicznej posiada kompanion.*

Kompaniony są złożone z elementów, które definiuję przez analogię z pojęciami znanymi z forsingu. Niech $\mathcal{B}$ będzie miłą bazą, a $X_0$ niezmienniczym $G_\delta$-zbiorem. Element $x \in X_0$ nazywamy *$\mathcal{B}$-generycznym* w $X_0$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ istnieje $\tau$-otwarte otoczenie $A$ elementu $x$ takie, że $B$ jest zbiorem pierwszej lub drugiej kategorii Baire'a na $A \cap X_0$. Element $x$ jest *ściśle generyczny*, jeśli zbiór $A$ można dobrać tak, by drugi warunek spełniony był dokładnie wtedy, gdy $x \in B$. Dowodzę, że wszystkie ściśle generyczne elementy tworzą niezmienniczy zbiór drugiej kategorii na $X_0$, a każdy kompanion jest jego podzbiorem.

W centralnej części pracy [H4] (Sekcja 3) rozważam pytanie, kiedy kawałek kanonicznej partycji zawiera $G_\delta$-orbitę. Główne twierdzenie tej części nasuwa skojarzenia z teorio-modelowym twierdzeniem Saracino o isnieniu modelowego kompanionu teorii $\omega$-kategorycznej. Chociaż jest ono dość techniczne, pomysł jest łatwy do prezentacji. Najpierw przenoszę z logiki pojęcie *typu*.

**Definicja** *Niech $t$ będzie miłą topologią z miłą bazą $\mathcal{B}$. Niech $H$ będzie podgrupą otwartą $G$, zaś $\hat{X}_0$ będzie niezmienniczym $t$-$G_\delta$-podzbiorem $X$.*

*(1) Rodzinę $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ nazywamy $H$-*typem* w $\hat{X}_0$, jeśli jest ona rodziną maksymalną ze względu na następują warunki:*
*(a) każdy zbiór $B \in \mathcal{F}$ jest $H$-niezmienniczy;*
*(b) $\hat{X}_0 \cap \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

*(2) $H$-typ $\mathcal{F}$ nazywamy głównym jeśli istnieje $B_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ taki, że $B_{\mathcal{F}} \cap \hat{X}_0 \subseteq B \cap \hat{X}_0$, dla każdego $B \in \mathcal{B}$.*

Otrzymuję twierdzenie, które jest odpowiednikiem twierdzenia Rylla-Nardzewskiego o teoriach $\omega$-kategorycznych.

**Twierdzenie 4.4.3.** (Theorem 3.4 w [H4]) *Rozważmy partycję kanoniczną względem miłej topologii $t$. Kawałek $\hat{X}_0$ tej partycji jest orbitą dokładnie wtedy, gdy dla każdej otwartej podgrupy $H < G$, każdy $H$-typ w $\hat{X}_0$ jest główny.*

Główny wynik pracy - Twierdzenie 3.6 (typu Saracino) określające warunek dostateczny do tego, by kawałek kanonicznej partycji zawierał orbitę, która jest kompanionem (czyli $G_\delta$-zbiorem) jest dalszym rozwinięciem Twierdzenia 4.4.3.

Moje badania posumowuję analizą pojęcia kompanionu dla relacji sprzężenia w grupie $A(\mathbb{Q})$. Korzystając z wyników pracy [H3] otrzymuję w Rozdziale 4 pracy [H4] następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.4.4.** (Theorem 4.3, [H4]) *Każdy kawałek kanonicznej partycji $A(\mathbb{Q})$ zawiera klasę sprzężenia, która jest zbiorem typu $G_\delta$.*

## 5. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

Przedstawię krótko prowadzone po doktoracie badania, których wyniki zostały zawarte w następujących pracach.


[P1] *Equivalence relations induced by some locally compact groups of homeomorphisms of* $2^{\mathbb{N}}$ , Colloq. Math., 103(2005), 287 - 301.

[P2] *Polish group actions, nice topologies and admissible sets*, Math. Logic Quart. 54(2008), no.6, 597- 616.

[P3] *Inert subgroups of uncountable universal locally finite groups* , Comm. Math. Univ. Carol. 44(2003), 615 - 622 ,

[P4] *Strong boundedness and algebraically closed groups* ,

Comm. Math. Uni. Carol., 48(2007), 205 - 209.

Pierwsze dwie prace są związane z tematem rozprawy habilitacyjnej, a dwie ostatnie poświęcone są pewnym teoriomnogościowym (topologicznym) pytaniom w algebrze (- dlatego powyższe uporządkowanie nie jest chronologiczne).

5.1 Problematyka pracy [P1] zainspirowana została badaniami Kechrisa nad działaniem grup lokalnie zwartych ([15]). Kechris analizował m.in. działania lokalnie zwartych grup spełniajających drugi aksjomat przeliczalności. Udowodnił on, że jeśli $G$ jest taką grupą, wtedy dowolną standardową borelowską $G$-przestrzeń $X$ można w sposób jednoznaczny przedstawić jako sumę $X = U \cup C$ dwu rozłącznych niezmienniczych zbiorów borelowskich tak, by dla indukowanej na $X$ relacji orbit $E$ spełnione były następujące warunki:

(1) $E|_C$ jest przeliczalna, tzn. każda $E|_C$-orbita jest przeliczalna ;

(2) Istnieje borelowski zbiór $Z \subseteq U$ mający przeliczalny przekrój z każdą

$E|_U$-orbitą taki, że relacja $E|_U$ jest borelowsko izomorficzna z relacją

$(E|_Z) \times Id_{\mathbb{R}}$ określoną na produkcie $Z \times \mathbb{R}$.

Zbiory $U$ i $C$ nazywają się odpowiednio częścią ciągłą i przeliczalną relacji $E$.

W przypadku konkretnego działania pojawia się naturalne pytanie o to, czy można wybrać zbiór $Z$ i borelowski izomorfizm między $Z \times \mathbb{R}$ i częścią ciągłą $U$ tak, by miały one małą złożoność borelowską. W pracy [P1] analizujemy takie zagadnienie w następującej sytuacji.

Niech $T$ będzie lokalnie skończonym drzewem z korzeniem, a $B(T)$ jego granicą (tzn. przestrzenią gałęzi). Rozważam działania na przestrzeni $B(T)$ pewnych lokalnie zwartych grup jej homeomorfizmów. Szczególnie interesują mnie *izometrie lokalne*. Homeomorfizm $f : B(T) \to B(T)$ nazywamy izometrią lokalną, jeśli każda gałąź $x \in B(T)$ posiada otoczenie $U \subseteq B(T)$ takie, że $f$ przekształca $U$ na $f[U]$ izometrycznie. Izometrie lokalne tworzą podgrupę domkniętą nieco szerszej grupy homeomorfizmów *typu Thomsona*, którą również analizuję w [P1]. Głównym wynikiem pracy jest następująca uszczegółowiona wersja twierdzenia Kechrisa dla lokalnie zwartych grup izometrii lokalnych (wersja Twierdzenia 9 w Sekcji 2.2 w [P1]).

**Twierdzenie 5.1.1.** (Theorem 9, [P1]) *Niech $G$ będzie lokalnie zwartą grupą izometrii lokalnych, $E$ indukowaną na $B(T)$ relacją orbit, zaś $U \subseteq B(T)$ jej ciągłą częścią. Istnieje $G_\delta$-zbiór $Z$ mający przeliczalne przekroje ze wszystkimi orbitami* *relacji $E|_U$ i homeomorfizm $\phi_G : Z \times 2^{\mathbb{N}} \to U$ taki, że*

$$\Big(\phi_G((z,\delta)), \phi_G((z',\delta'))\Big) \in E|_U \iff zEz'.$$

(Korekta: W Lemacie 7 w [P1] zbiory $G_n$ tworzą grupy tylko przy dodatkowym założeniu, że $G$ składa się z izometrii lokalnych. Dlatego w Twierdzeniu 9 w pracy [P1] zamiast ogólnego założenia, że $G$ jest grupą homeomorfizmów typu Thomsona, trzeba przyjąć mocniejsze założenie, że $G$ jest grupą izometrii lokalnych).

Zatem w rozważonym przykładzie, zbiór i borelowski izomorfizm, których istnienie postuluje twierdzenie Kechrisa, mają bardzo małą złożoność.

Praca [P1] zawiera wiele przykładów. Szczególnie ciekawy jest przypadek grup proskończonych.

**Twierdzenie 5.1.2.** (Proposition 13, [P1]). *Niech $G$ będzie grupą proskończoną mającą przeliczalną bazę. Istnieje lokalnie skończone drzewo $T$ i izometryczne działanie $G$ na $T$ takie, że określona przez nie $G$-przestrzeń $B(T)$ jest uniwersalną borelowską $G$-przestrzenią.*

Dowodzę również (Proposition 14, [P1]), że bez założenia domkniętości $G$ w $Iso(T)$ (co wyprowadza poza klasę grup proskończonych), opis możliwych relacji orbit staje się bardzo skomplikowany: grupa $G$ może mieć dwie realizacje działań na drzewach, które indukują relacje orbit nieporównywalne względem redukowalności borelowskiej.

5.2. Praca [P2] jest związana z pracą [H4]. W [P2] rozważam zagadnienia kodowania i efektywności obiektów z [H4].

Moje podejście można opisać analizując sytuację działania logicznego. Niech $X_L$ będzie przestrzenią struktur przeliczalnych języka $L$. Niech $F$ będzie przeliczalnym fragmentem $L_{\omega_1\omega}$, zaś $t_F$ i $\mathcal{B}_F$ będą odpowiednio zadaną przez $F$ miłą topologią i jej miłą bazą. Rozważmy działanie logiczne $Sym(\omega)$ na przestrzeni $(X_L, t_F)$ oraz zbiór dopuszczalny $\mathbf{HF}(M)$ dziedzicznie skończonych zbiorów na pewnym modelu $M \in X_L$. Standardowe konstrukcje uogólnionej obliczalności umożliwiają kodowanie w modelu $\mathbf{HF}(M)$ niektórych niezmienniczych relacji na $\mathcal{B}_F$ określających topologiczne własności bazy. Ponadto, złożoność tych relacji na $\mathcal{B}_F$ odpowiada złożoności formuł, które opisują te relacje w $\mathbf{HF}(M)$.

W pracy [P2] analizuję bardziej ogólną sytuację: działania domkniętej grupy permutacji $G$ na dowolnej przestrzeni polskiej $(X,\tau)$. Aby pracować w sytuacji podobnej do przypadku działania logicznego, każdemu elementowi $x \in X$ przypisujemy strukturę $M_x$ języka pierwszego rzędu $L_{\mathcal{NA}}$, odpowiednio zdefiniowanego w pracy. Jest to ciągłe odwzorowanie $X$ w przestrzeń $L_{\mathcal{NA}}$-struktur, które elementom z tej samej orbity przyporządkowuje struktury izomorficzne.

Głównym obiektem badań są zbiory dopuszczalne postaci $\mathbf{HF}(M_x)$ i miłe topologie $G$-przestrzeni $\langle X, \tau \rangle$. W Twierdzeniu 3.3 [P2] podaję konkretne przykłady takich topologii. W rozdziale czwartym opisuję sposoby kodowania miłych baz tych topologii w $\mathbf{HF}(M_x)$. Pokazuję, że podobnie jak w przypadku działania logicznego, w $\mathbf{HF}(M_x)$ można formalizować wiele zagadnień związanych z kategorią Baire'a (Rozdział 5). W szczególności relacja forsingowa wprowadzona w pracy [H4] może być zakodowana w $\mathbf{HF}(M_x)$.

Opisuję również pewne związki z własnościami zbiorów typu $\mathbf{HF}(M)$ (np. spełnianie twierdzeń uniformizacyjnych, Rozdział 6) i podaję różne przykłady. Przykład działania grupy $A(\mathbb{Q})$ przez sprzężenie jest chyba najciekawszy. Wymagał on rozważenia pewnych wzbogaceń teorii elementarnej generycznych automorfizmów $(\mathbb{Q}, <)$.

Zagadnienia kodowania w zbiorach dopuszczalnych były bardzo popularne w logice lat 80-tych XX-go wieku. Głównym promotorem tych badań był John Barwise. Mimo tego, że po jego śmierci aktywność tego kierunku jest mniejsza, uważam, że metody tego działu odegrają istotną rolę dla kilku znanych problemów logiki matematycznej.

5.3 Praca [P3] jest motywowana pytaniem V.Belyaeva ([5],) *czy nieprzeliczalne lokalnie skończone grupy posiadają nietrywialną topologię* (Belyaev pokazał, że w przypadku przeliczalnym odpowiedź jest pozytywna). Rozważam to pytanie w pewnej szczególnej klasie grup lokalnie skończonych.

Lokalnie skończona grupa $G$ nazywa się *uniwersalną* grupą lokalnie skończoną, jeśli każda grupa skończona zanurza się w $G$ i każdy izomorfizm pomiędzy jej skończonymi podgrupami rozszerza się do automorfizmu wewnętrznego. Wiadomo ([10], [16]), że istnieje dokładnie jedna uniwersalna lokalnie skończona grupa przeliczalna oraz $2^\kappa$ takich grup rzędu $\kappa$, dla każdej liczby kardynalnej $\kappa > \omega$. Okazało się, że metody zastosowane przez Belyaeva są niewystarczające już w przypadku mniej ogólnego pytania: *czy uniwersalne lokalnie skończone grupy posiadają nietrywialną topologię?*

Moje badania koncentrują się na podgrupach *inertywnych*: podgrupę $H$ grupy $G$ nazywamy *inertywną*, jeśli dla każdego $g \in G$ spełniony jest warunek $|H : H \cap H^g| < |H|$. Grupa $G$ jest *rezydualnie skończona*, jeśli dla każdego $g \in G$ różnego od jedności istnieje podgrupa normalna $H < G$ skończonego indeksu taka, że $g \notin H$. Pokazuję, że grupa jest topologizowalna, jeśli posiada nieskończoną inertywną podgrupę rezydualnie skończoną. Warunek ten jest konsekwencją pewnego twierdzenia pierwszej części pracy [P3], które w przypadku przeliczalnym już pojawiło się w [5].

Głównym wynikiem pracy jest Twierdzenie 5.3.1. Jego dowód stanowi opis dwóch konstrukcji nieprzeliczalnych uniwersalnych grup lokalnie skończonych posiadających rezydulanie skończone podgrupy inertywne.

**Twierdzenie 5.3.1.** (Theorem 7, [P3]) (1) *Istnieje uniwersalna lokalnie skończona grupa mocy $\omega_1$ mająca przeliczalną rezydualnie skończoną podgrupę inertywną.*

(2) *Dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej $\kappa$ istnieje uniwersalna lokalnie skończona grupa $G$ rzędu $\kappa$ o następujących własnościach*:
(a) *istnieje rezydualnie skończona podgrupa inertywna $H < G$ rzędu $\kappa$;*
(b) *jeśli $\kappa$ jest regularna, to $G$ nie posiada podgrup inertywnych rzędu $< \kappa$.*

5.4 Grupa $G$ jest *mocno ograniczona*, jeśli dla każdego zbioru $U$ jej generatorów, istnieje liczba naturalna $n$ taka, że każdy element grupy można otrzymać jako produkt co najwyżej $n$ elementów ze zbioru $U \cup U^{-1}$ oraz $G$ nie jest sumą ściśle rosnącej rodziny $\{H_n : n \in \omega\}$ swoich podgrup. Grupa $G$ jest grupą $\omega_1$-*egzystencjalnie domkniętą*, jeśli dla każdego zbioru $\sum(\overline{x})$ równań i nierówności postaci $w(\overline{x}, \overline{a}) = (\neq)1$ zależnych od zmiennych $\overline{x}$ i co najwyżej przeliczalnie wielu parametrów z $G$, jeśli $\sum(\overline{x})$ ma rozwiązanie w pewnym rozszerzeniu grupy $G$, to ma rozwiąznie w samej grupie $G$. W pracy [P4] otrzymuję nowy dowód następującego twierdzenia de Cournuliera z [7].

> **Twierdzenie** (de Cournulier) Każda grupa $\omega_1$-egzystencjalnie domknięta jest mocno ograniczona.

W odróżnieniu od dowodu de Cornuliera, mój dowód bazuje na dość szczegółowym rozważaniu własności grup egzystencjalnie domkniętych (niekoniecznie $\omega_1$-egzystencjalnie domkniętych) i daje nową algebraiczno-kombinatoryczną informację w tym ogólniejszym przypadku (Proposition 2 w [P4]).

Przedstawione przeze mnie rozumowanie wykorzystuje następującą charakteryzację grup mocno ograniczonych ([6], [7]): *grupa $G$ jest mocno ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy każdy rosnący ciąg $(X_n : n \in \omega)$ jej zbiorów sumujący się do $G$ i spełniający warunek $\{1\} \cup X_n^{-1} \cup X_n \cdot X_n \subseteq X_{n+1}$, dla każdego $n \in \omega$, jest od pewnego miejsca stały i równy $G$.*

Pokazuję, że z każdą egzystencjalnie domkniętą grupą $G$ i każdym ściśle rosnącym ciągiem nieskończonym $(X_n)$ spełniającym opisane wyżej warunki, można związać pewne drzewo binarne (Proposition 2, [P4]). Z drugiej strony dowodzę, że gdy $G$ jest $\omega_1$-egzystencjalnie domknięta, to drzewo o takich własnościach nie istnieje.

## References


[1] J.Barwise, Admissible Sets and Structures, Springer-Verlag, NY, 1975.

[2] H.Becker, Polish group actions: Dichotomies and generalized elementary embeddings, J. Amer. Math. Soc. **11**, 397 - 449 (1998).

[3] H.Becker, Topics in invariant descriptive set theory, Annals of Pure and Appl. Logic, **111**, 145 - 184 (2001).

[4] H.Becker and A.Kechris, The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions, Cambridge University Press, Cambridge,1996.

[5] V. Belyaev, Locally finite groups with a finite non-separated subgroups, Siberian Math. J, 34(1993), no. 2, 23-39.

[6] Bergman G., *Generating infinite symmetric groups*, Bull.London Math.Soc. 38(2006), 429 - 440.

[7] de Cornulier Y., *Strongly bounded groups and infinite powers of finite groups*, Comm. Algebra 34(2006), 2337 - 2345.

[8] M.Foreman, *A descriptive view of ergodic theory*, In: Descriptive Set Theory and Dynamical Systems, ed. by M.Foreman, A.S.Kechris, A.Louveau and B.Weiss, London Mathematical Society Lecture Notes, Series 277, Cambridge University Press, 2000, 87 – 173.

[9] H.Friedman, *Countable models of set theories*, In: Cambridge Summer School in Mathematical Logic (A.R.D.Mathies and H.Rogers, eds.),Springer-Verlag (1973), 539 - 573.

[10] Ph.Hall, Some constructions for locally finite groups, J. London Math. Soc. **34**, 305 - 319 (1959).

[11] J.Hirschfeld and W.H.Wheeler, Forcing, Arithmetic, Division Rings, Springer-Verlag, NY, 1975.

[12] G.Hjorth, Classification and Orbit Equivalence Relations. AMS 1991

[13] G.Hjorth, Variations on Scott, unpublished notes

[14] A.Kechris, Classical Descreptive Set Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] A.Kechris, *Countable sections for locally compact group actions II*, Proc. Amer. Math. Soc., 120(1994), 241 - 247.

[16] A.Macintyre and S.Shelah, Uncountable universal locally finite groups. J.Algebra 43(1976), 168-175

[17] B.Majcher-Iwanow, Polish group actions and admissible sets, arXiv:math/0701788.

[18] B.Majcher-Iwanow, Local operations and locally open actions, arXiv: 1003.3258.

[19] M.Nadel, Scott sentences and admissible sets, Ann. Math. Log. **7**(1974), 269 - 294.

[20] R.Sami, Polish group actions and the Vaught conjecture, Trans. Amer. Math. Soc., **341**, 335 - 353 (1994).

[21] J.K.Truss, Generic automorphisms of homogenous structures, Proc. London Math. Soc.(3) **65**, 121-141 (1992).

[22] R.Vaught, Invariant sets in topology and logic, Fund. Math. **82**, 269 - 293 (1974).

Barbara Majcher-Iwanow