Recenzja habilitacji dr Barbary Majcher Iwanow

Prof. dr hab. Zofia Adamowicz
Instytut Matematyczny PAN

2 grudnia 2012

Rozprawa habilitacyjna składa się z czterech opublikowanych samodzielnych prac. Dalej odnoszę się do nich jako do prac H1, H2, H3, H4. Wszystkie one są opublikowane w renomowanych pismach.

Dziedziną, do której te prace należą, jest badanie działania grup polskich na przestrzeniach polskich, czyli G-przestrzeni polskich. Metody są topologiczne. Motywem przewodnim tego cyklu prac jest problem klasyfikacji orbit rozumiany jako znalezienie systemu niezmienników relacji równoważności wyznaczonej przez orbity (relacji orbit) oraz znalezienie prostej funkcji przyporządkowującej orbitom odpowiednie niezmienniki. W szczególności bada się przypadek klasyfikacji orbit przez przeliczalne modele, szczegółowo rozważany w H2 i H4. Stawia się pytanie o charakteryzację niezmienniczych kanonicznych podzbiorów rozważanych przestrzeni. Ogólne pojęcia są konkretyzowane w poszczególnych pracach H1, H2, H3, H4.

Używa się metod topologicznych i teoriomnogościowych. Szczegółowe pojęcia i metody stosowane w pracy pochodzą głównie od H. Becker'a – na przykład pojęcie miłej topologii albo ι-zanurzenia. W pracach H2 i H4 stosuje się takie metody do rozwiązywania problemów, które mają odpowiedniki teorio-modelowe. Okazuje się, że jest możliwe przetłumaczenie pojęć teoriomodelowych na obiekty topologiczne w pewnej konkretnej G-przestrzeni topologicznej nazywanej działaniem logicznym (logic action). W szczególności topologia wprowadzona w tej przestrzeni przez obiekty o genezie teoriomodelowej okazuje się być miła, a zanurzenia elementarne okazują się być ι-zanurzeniami (a więc stosują się do tych obiektów metody i twierdzenia Becker'a).

Podstawowym przykładem G-przestrzeni polskiej w pracach H2 i H4 jest działanie logiczne na przestrzeni $X_L = \Pi_{i \in I} 2^{\omega^{n_i}}$ z produktową topologią τ, na której działa grupa S_∞ permutacji ω. Punkty tej przestrzeni można traktować jako struktury (funkcje charakterystyczne struktur) dla przeliczalnego języka z symbolami relacyjnymi $R_i^{n_i}$, gdzie n_i jest arnością R_i. Są to struktury, których uniwersum jest ω, a więc, modulo numeracja, dowolne struktury przeliczalne. Pojęcia teorio-modelowe tłumaczy się na obiekty topologiczne w tej przestrzeni. Na przykład rodzina struktur M spełniających $\varphi(\bar{s})$, gdzie φ jest formułą otwartą a $\bar{s}$ ciągiem elementów M, jest zbiorem otwartym w przestrzeni X_L. Ogólnie, niech φ będzie dowolną formułą a s ciągiem elementów ω i niech $Mod(\varphi, \bar{s})$, będzie zbiorem struktur spełniających $\varphi(\bar{s})$. Możemy wprowadzić w X_L nową topologię t_F, której bazą są zbiory $Mod(\varphi, \bar{s})$, gdzie φ przebiega pewien zbiór F formuł języka $L_{\omega_1,\omega}$. Ta topologia jest subtelniejsza od topologii τ. Jak się okazuje, ma ona pewne eleganckie własności. Możemy teraz przetłumaczyć na język topologiczny pojęcie elementarnej równoważności struktur. W tym celu definiuje się pojęcie kanonicznego podziału $\{Y_t : t \in T\}$, gdzie $T = \{t \in 2^\omega : Y_t \neq 0\}$, zbioru X_L na zbiory G_δ niezmiennicze względem działania grupy, takie, że orbita każdej części Y_t jest w tej części gęsta. Ten podział zależy od topologii, a więc od zbioru F. Wówczas każda z części tego podziału jest klasą elementarnej względem F równoważności struktur.

Uzyskuje się pewne twierdzenia topologiczne, które są, w przypadku działania logicznego i przy odpowiednim tłumaczeniu pojęć, twierdzeniami z teorii modeli. Na przykład, w terminach topologicznych uzyskuje się twierdzenie Barwise'a-Nadel'a i twierdzenie Rylla-Nardzewskiego.

W pracy H2 nie wprowadza się nowej topologii, rozważa się tylko topologię τ.

Przedstawia się zbiory $Mod(\varphi, \emptyset)$, dla zdań φ należących do pewnego fragmentu języka $L_{\omega_1,\omega}$ jako pewne niezmiennicze zbiory borelowskie w przestrzeni X_L z topologią τ.

Następujące znane twierdzenie Lopez'a Escobar'a jest w tym duchu:

Zbiory $Mod(\varphi, \emptyset)$, dla φ będących zdaniami języka $L_{\omega_1,\omega}$ rangi kwantyfikatorowej $\leqslant \omega \cdot \alpha$ to są niezmiennicze zbiory borelowskie w przestrzeni X_L z topologią τ, takie, które są rangi borelowskiej Σ^0_α.

W pracy H2 rozważa się fragmenty $L_{\mathbb{A}} \subseteq L_{\omega_1,\omega}$ wyznaczone przez pewien zbiór dopuszczalny $\mathbb{A}$ i przedstawia się je jako niezmiennicze zbiory borelowskie w przestrzeni X_L z topologią τ, które są rangi borelowskiej

$o(\mathbb{A})$ (tzn. klasy $\Sigma_{o(\mathbb{A})}$). Otrzymujemy w ten sposób topologiczną wersję twierdzenia Barwise'a-Nadel'a:

Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym, $L \in \mathbb{A}$ przeliczalnym językiem i niech $\mathfrak{M}$ będzie L-strukturą w $\mathbb{A}$. Wtedy jeśli dowolne L-struktury $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}$ spełniają te same zdania z fragmentu $L_{\mathbb{A}}$, to spełniają te same zdania rangi kwantyfikatorowej $\alpha \leqslant o(\mathbb{A})$.

Inaczej można to twierdzenie wyrazić następująco:

Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym, $o(\mathbb{A}) > \omega$, $L \in \mathbb{A}$ przeliczalnym językiem relacyjnym. Niech $x, y \in X_L$ i $x \in \mathbb{A}$. Wtedy jeśli x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich postaci $B_\sigma = \{z \in X_L : z \models \sigma\}$, gdzie $\sigma \in L_{\mathbb{A}}$, to dla każdego $\alpha \leqslant o(\mathbb{A})$, x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich rangi borelowskiej α.

Uzyskuje się uogólnienie tego twierdzenia poprzez rozważanie dowolnej polskiej G-przestrzeni X, gdzie G jest grupą polską działającą na przestrzeni polskiej X, zamiast przestrzeni X_L z działającą na niej grupą S_∞. To uogólnienie ma dwie wersje, efektywną i ogólną.

Wersja efektywna:

Niech G, X będą rekurencyjnie prezentowalne względem ζ, operacje grupowe w G i działanie G na X będą hyperarytmetyczne w ζ. Jeśli $x, y \in X$, x jest hyperarytmetyczne w ζ i x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach hyperarytmetycznych w ζ, to dla każdego $\alpha \leqslant \omega_1^{CK}(\zeta)$, x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich rangi borelowskiej α.

Wersja ogólna:

Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem dopuszczalnym spełniającym aksjomat nieskończoności. Niech G, X i $x \in X$ będą kodowalne w $\mathbb{A}$. Jeśli x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich w X o kodach borelowskich należących do $\mathbb{A}$, to x i y są w tych samych niezmienniczych zbiorach borelowskich rangi borelowskiej $\alpha \leqslant o(\mathbb{A})$.

Omówię teraz wybiórczo pracę H4. Jest ona poświęcona uogólnieniu w terminach topologicznych twierdzenia Rylla-Nardzewskiego o teoriach $\aleph_0$-kategorycznych. Stosuje się w niej podobne metody topologiczne jak w pracy H2. Znów najlepszą ilustracją jest przestrzeń X_L z działającą na niej grupą S_∞. Rozważa się topologię t_F wyznaczoną przez zbiory $Mod(\varphi, \bar{s})$, gdzie $\varphi \in F$.

Rozważa się kanoniczny podział $\{Y_t : t \in T\}$, gdzie $T = \{t \in 2^\omega : Y_t \neq 0\}$. Ponieważ interesuje nas przypadek teorii $\aleph_0$-kategorycznej, szczególnie jest interesujący dla nas przypadek, w którym pewna część Y_t tego podziału, a więc zbiór modeli pewnej teorii zupełnej względem fragmentu F, jest zbiorem struktur izomorficznych. Jest tak w szczególności w przypadku jeśli Y_t jest orbitą względem działania grupy S_∞ na X_L. Taka sytuacja jest bardzo szczególna. Nieco ogólniejsza jest sytuacja, gdy pewna część Y_t kanonicznego podziału zawiera G_δ-podzbiór X_1, który jest G_δ w topologii τ, jest orbitą i wtedy jest t_F-kompanionem zbioru Y_t, przy pewnym szczególnym pojęciu kompanionu. To pojęcie kompanionu jest oryginalnym pojęciem wprowadzonym przez autorkę i uogólnia ono pojęcie kompanionu teorii w teorii modeli. Mianowicie, X_1 jest kompanionem zbioru niezmienniczego X_0 zawartego w pewnej części kanonicznego podziału jeśli X_1 jest niezmienniczym zbiorem G_δ w topologii τ, $\bar{X}_1 = \bar{X}_0$, tzn. domknięcia w topologii τ są równe i dla każdego zbioru B bazowego dla topologii t_F, B jest domknięto-otwarty na X_1 w topologii τ. Jeśli X jest zbiorem wszystkich modeli pewnej formuły φ w języku pierwszego rzędu to X jest otwarty w τ dokładnie wtedy, gdy φ jest formułą czysto egzystencjalną. Wobec tego, w szczególnym przypadku, jeśli F jest zbiorem wszystkich formuł pierwszego rzędu, to dla zbioru bazowego $B = Mod(\varphi, \bar{s})$ w topologii t_F, warunek, że B jest τ-otwarty na X_1, oznacza, że $B \cap X_1$ składa się ze struktur spełniających pewną formułę czysto egzystencjalną, a więc, że w ograniczeniu do struktur w X_1, φ jest równoważna formule czysto egzystencjalnej. W tym przypadku każda część X_0 kanonicznego podziału jest zbiorem wszystkich przeliczalnych modeli pewnej zupełnej teorii T. Jeśli T^* jest kompanionem T w sensie teorii modeli, to znaczy jest modelowo zupełną teorią, w której każda formuła jest równoważna formule egzystencjalnej i każdy model T zanurza się w pewien model T^*, to zbiór X_1 wszystkich przeliczalnych modeli teorii T^* jest kompanionem X_0. Fakt, że jest on G_δ w topologii τ wynika z faktu, że w tym przypadku T^* jest $\forall\exists$-aksjomatyzowalna. Warunek $\bar{X}_0 = \bar{X}_1$ odpowiada zanurzeniu modeli dla T w modele dla T^*. A więc, wprowadzone tu pojęcie kompanionu uogólnia odpowiednie pojęcie teorio-modelowe.

Przy takiej definicji kompanionu, sytuacja, gdy T jest teorią $\aleph_0$-kategoryczną i odpowiednia część Y_t kanonicznego podziału zawiera G_δ-podzbiór X_1, który jest G_δ w topologii τ, jest orbitą i jest t_F-kompanionem zbioru Y_t, odpowiada toerio-modelowemu twierdzeniu Saracino o istnieniu modelowego kompanionu: każda $\aleph_0$-kategoryczna teoria ma $\aleph_0$-kategoryczny modelowy kompanion.

Ogólnie, w naszym przypadku część kanonicznego podziału może mieć więcej niż jeden kompanion. Jeśli jest taki kompanion, który jest orbitą, to jest to najbardziej kanoniczna orbita zawarta w tej części podziału.

Topologia t_F okazuje się mieć bardzo eleganckie własności. Spełnia ona wprowadzoną przez Becker'a definicję topologii miłej względem topologii τ.

Wszystkie powyższe pojęcia uogólnia się na przypadek dowolnej G-przestrzeni X, gdzie G jest domkniętą podgrupą S_∞ działającą na przestrzeni polskiej X. Pojęcie topologii t_F uogólnia się na przypadek dowolnej topologii t miłej względem wyjściowej topologii τ w przestrzeni X. Znów rozważa się sytuację, gdy pewna część Y kanonicznego podziału zawiera G_δ-podzbiór X_1, który jest G_δ w topologii τ, jest orbitą i jest t-kompanionem zbioru Y.

Kluczowym technicznym faktem w pracy jest następująca obserwacja:

Niech $X_1 = Gx_1$ dla pewnego (dowolnego) $x_1 \in X_1$ i niech X_1 będzie G_δ w X. Wtedy obie topologie τ i t pokrywają się na X_1.

Ta obserwacja może być traktowana jako pewna wersja twierdzenia Lindströma o tym, że każda $\forall\exists$-aksjomatyzowalna $\aleph_0$-kategoryczna teoria jest modelowo zupełna. Bycie G_δ odpowiada tu $\forall\exists$-aksjomatyzowalności, bycie orbitą, kategoryczności. Zaś jeśli τ i t są takie, jak w najprostszym wypadku działania grupy S_∞ na przestrzeni X_L i $t = t_F$, dla F będącego zbiorem formuł pierwszego rzędu, równość topologii t i τ odpowiada elementarnej równoważności struktur w X_1, a więc X_1 jest w tym wypadku zbiorem wszystkich przeliczalnych modeli pewnej teorii modelowo zupełnej.

Przełożenie równości topologii τ i t na elementarną równoważność struktur w X_1 jest poprzez pojęcie t-zanurzalności, która w tym wypadku jest elementarną zanurzalnścią. Jest to pojęcie wprowadzone przez Becker'a. Jest ono wykorzystywane także w pracy H3.

Dla każdej otwartej podgrupy $H < G$ i niezmienniczego G_δ-podzbioru $\hat{X}_0$ przestrzeni X, definiuje się pojęcie H-typu zbioru $\hat{X}_0$ względem topologii t.

Uzyskuje się następujące uogólnienie twierdzenia Rylla Nardzewskiego:

Niech X, τ będzie G-przestrzenią polską, a t miłą topologią na X. Rozważmy podział kanoniczny względem topologii t. Wtedy część $\hat{X}_0$ tego podziału jest G-orbitą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej bazowej podgrupy $H < G$, każdy H-typ zbioru $\hat{X}_0$ jest główny.

W pracy H3 bada się działanie grupy polskiej na sobie zdefiniowane jako sprzężenie. Wtedy orbity są klasami sprzężenia. Rozważanymi grupami polskimi są tu $A(\mathbb{Q})$ i $Sym(\omega)$. Ważnym niezmiennikiem dla orbit jest w przypadku $S(\omega)$ typ cykli, zaś w przypadku $A(\mathbb{Q})$ typ porządkowy rodziny orbitali danego automorfizmu względem izomorfizmów zachowujących parzystość orbitali. W terminach tych niezmienników formułuje się warunki konieczne i dostateczne na to, by klasa sprzężenia była zbiorem G_δ (tw. 1.8 i 2.8). Formułuje się też warunki konieczne i dostateczne na to, by klasa sprzężenia była zbiorem F_σ, które w przypadku $A(\mathbb{Q})$ się trywializują do bycia klasą automorfizmu trywialnego. W przypadku $Sym(\omega)$ komplikacja klas sprzężenia jest zawsze co najwyżej Π^0_3.

Jako narzędzia do dowodu powyższych twierdzeń używa się wspomnianego wyżej pojęcia ι-zanurzenia, wprowadzonego przez Becker.a. Dla automorfizmów w $A(\mathbb{Q})$ wprowadza się pojęcie transformacji. Kluczowe jest następujące twierdzenie (tw. 2.2):

Niech $f, h \in A(\mathbb{Q})$. Wtedy f jest ι-zanurzalny w h wtedy i tylko wtedy, gdy h jest transformacją f.

Praca H1 dotyczy ogólnych własności polskich G-przestrzeni, czyli działania grup polskich G na przestrzeniach polskich. Głównym pojęciem pracy H1 jest pojęcie ostatecznej otwartości działania grupy. Dowodzi się następującego twierdzenia (prop. 2.8):

Wszystkie ciągłe działania grupy $(\mathbb{R}, +)$ na przestrzeniach polskich są ostatecznie otwarte.

Ostatni rozdział tej pracy jest poświęcony niezmiennikom Hjortha-Scotta (używanym też w H2). Dowodzi się, że klasa relacji orbit indukowanych przez działania ostatecznie otwarte pokrywa się z klasą relacji orbit klasyfikowalnych w sposób zupełny przy użyciu uogólnionej analizy Scotta (tw. 3.7)

Stąd w szczególności wynika, że relacja orbit indukowanych przez działania ostatecznie otwarte jest klasyfikowalna przez przeliczalne modele.

Na tym zakończę omawianie rozprawy habilitacyjnej. Omówiłam prace składające się na nią w kolejności prawie przeciwnej do ich numeracji, czyli do ich uszeregowania pochodzącego od autorki. Uszeregowanie autorki, tak jak pisze ona w autoreferacie, miało na celu przejście od zagadnień ogólniejszych do bardziej szczegółowych. Ja uszeregowałam te prace przeciwnie, z jednej strony dlatego, że lubię przechodzić od konkretności do uogólnienia, a z drugiej strony uszeregowałam je wdług mojej preferencji. Najbardziej podobają mi się prace H2 i H4.

Na pozostały dorobek autorki składają się prace załączone jako P1, P2, P3, P4 i omówione w autoreferacie, z których praca P2 jest opublikowana w czołowym piśmie, trzy prace napisane przed doktoratem, praca wspólna z Cichoniem, Krawczykiem i Węglorzem opublikowana w Journal of Symbolic

Logic, pięć prac opublikowanych w wydawnictwach mniej renomowanych lub nieopublikowanych.

Najciekawsza wydaje mi się z nich praca P2, znów nawiązująca do działania logicznego i podobnie jak praca H2, do teorii zbiorów dopuszczalnych Barwise'a.

Ogromnie podoba mi się w pracach H2, H4 i P2 topologiczne podejście do zagadnień toerio modelowych. Pojęcie działania logicznego wydaje mi się bardzo eleganckie. Bardzo mi się podobają topologiczne odpowiedniki pojęć teorio-modelowych, a w szczególności topologiczne odpowiedniki twierdzeń Lindström'a, Barwise'a Nadela, Saracino i Rylla Nardzewskiego.

Podsumowując uważam, że dorobek dr Barbary Majcher Iwanow, mimo, że ilościowo nie bardzo duży, jest bardzo ciekawy i wartościowy. Najciekawsze prace są opublikowane w bardzo dobrych pismach.

Konkluzja.

Uważam, że rozprawa habilitacyjna i pozostały dorobek spełniają warunki określone w ustawie o stopniach i tytule naukowych w odniesieniu do habilitacji. Wnoszę zatem o dopuszczenie kandydatki do dalszych szczebli przewodu habilitacyjnego.

W Adamowicz