prof. dr hab. Piotr Zakrzewski
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 10.12.2012 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Barbary Majcher-Iwanow

Głównym przedmiotem oceny jest jednotematyczny cykl czterech publikacji [H1]-[H4] (stosuję tu numerację zgodną z Autoreferatem habilitantki), który w dalszej części recenzji będę nazywał Rozprawą.

1. Problematyka badawcza Rozprawy.

Wymienione prace dotyczą dziedziny matematyki, którą coraz częściej nazywa się niezmienniczą deskryptywną teorią mnogości (określenie to stosuje w swoich pracach Howard Becker, jest ona też użyta w tytule wydanej niedawno monografii Su Gao „Invariant Descriptive Set Theory", CRC Press, 2009). Niezmiennicza deskryptywna teoria mnogości jest poświęcona relacjom równoważności wyznaczonym na przestrzeniach polskich przez ciągłe działania grup polskich na tych przestrzeniach. Problematyka ta jest bardzo aktywnie rozwijana od ponad trzydziestu lat (zob. bibliografia monografii Gao, zawierająca 167 pozycji). Od swoich początków, które Becker upatruje w pracy Roberta Vaughta z 1974 roku, wykorzystuje ona z jednej strony metody deskryptywnej teorii mnogości, zarówno klasycznej jak i efektywnej, z drugiej zaś - czerpie motywacje z teorii modeli. Szczególnie ważnymi przykładami ciągłych działań grup polskich na przestrzeniach polskich są bowiem tzw. działania logiczne, czyli działania grupy S_∞ wszystkich permutacji zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ (lub jej domkniętej podgrupy G) na przestrzeni polskiej wszystkich struktur danej przeliczalnej sygnatury, których uniwersum jest $\mathbb{N}$, przy czym do jednej orbity takiego działania należą struktury izomorficzne (odpowiednio: takie, dla których jedna z permutacji należących do G jest izomorfizmem). Poszukiwanie uogólnień pojęć i twierdzeń z obszaru działań logicznych na inne działania polskich grup niearchimedesowych (tą nazwą określa się grupy izomorficzne, jako grupy topologiczne, z domkniętymi podgrupami S_∞) lub nawet dowolnych grup polskich na przestrzeniach polskich stanowi ważny nurt niezmienniczej deskryptywnej teorii mnogości (w odniesieniu do niego Becker używa nawet nazwy „uogólniona teoria modeli"). Głównymi reprezentantami tego nurtu są Howard Becker i zmarły niedawno przedwcześnie Greg Hjorth.

2. Główne wyniki i ocena Rozprawy.

Prace [H1]-[H4], na które składa się Rozprawa, omówię w innej kolejności, bardziej odpowiadającej chronologii ich opublikowania.

Praca [H3] (opublikowana w Topology Appl.) poświęcona jest grupie $Aut(\mathbb{Q})$ automorfizmów struktury $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, z topologią zbieżności punktowej. Jest to ważny przykład niearchimedesowej grupy polskiej, badany z różnych punktów widzenia przez wielu autorów. Praca poświęcona jest działaniu tej grupy na siebie przez sprzężenia, co odpowiada jej działaniu logicznemu na strukturach postaci $(\mathbb{N}, \preceq, f)$, gdzie $(\mathbb{N}, \preceq)$ jest izomorficzną kopią struktury $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, a f jest permutacją $\mathbb{N}$ zachowującą porządek $\preceq$.

Głównym, w moim odczuciu, wynikiem tej interesującej pracy jest ciekawa kombinatoryczna charakteryzacja orbit typu G_δ tego działania; dokładniej, podane są kombinatoryczne warunki (Thm. 2.8(2)), których spełnienie przez funkcję $f \in Aut(\mathbb{Q})$ jest równoważne temu, że orbita f jest zbiorem typu G_δ w $Aut(\mathbb{Q})$. Wynik ten uzupełnia wcześniejszy rezultat Trussa, który znalazł kombinatoryczną charakteryzację gęstych orbit typu G_δ rozpatrywanego działania. Inne twierdzenie pracy podaje charakteryzację (Thm. 2.2) tych par $f, h \in Aut(\mathbb{Q})$, że (orbita) f jest lewostronnie zanurzalna w (orbitę) h w sensie wprowadzonego przez Beckera pojęcia zanurzalności, będącego odpowiednikiem zanurzalności elementarnej w teorii modeli.

Punktem wyjścia ciekawej pracy [H4] (opublikowanej w Math. Log. Quart.) jest odnotowane przez Beckera stwierdzenie, że każde ciągłe działanie grupy polskiej G na przestrzeni polskiej X jednoznacznie wyznacza podział tej przestrzeni, zwany podziałem kanonicznym, na takie niezmiennicze podzbiory Y typu G_δ, że orbita każdego elementu zbioru Y jest w nim gęsta. Elementy podziału kanonicznego są więc w pewnym sensie przybliżeniami typu G_δ orbit swoich elementów.

Może się zdarzyć, nawet w przypadku, gdy blok Y podziału kanonicznego nie jest orbitą, że zawiera on orbitę typu G_δ i taka orbita jest wówczas jedyna. Jednym z głównych celów pracy jest zbadanie, kiedy taka sytuacja zachodzi; ograniczamy się przy tym do działań grup niearchimedesowych, co sprawia, że jesteśmy dość bisko pierwotnego kontekstu działań logicznych. Ciekawą odpowiedź na to dość naturalne pytanie daje twierdzenie (Thm. 3.4), będące odpowiednikiem twierdzenia Rylla-Nardzewskiego o $\aleph_0$-kategoryczności z teorii modeli. W jego sformułowaniu użyte są, wprowadzone przez habilitantkę, odpowiedniki pojęć typu oraz typu głównego. W efekcie dostajemy elegancko sformułowany warunek konieczny i wystarczający na to, by element kanonicznego podziału (w odniesieniu do rozszerzenia wyjściowej topologii na X do tzw. topologii przyjemnej, ang. „nice topology", badanej przez Beckera i Kechrisa), był orbitą typu G_δ. Interesujący dowód tego twierdzenia oparty jest na technice „back and forth" użytej w sposób, który wydaje mi się oryginalny. Żałuję tylko, że końcówka dowodu jest napisana na tyle skrótowo, że istota tego argumentu nie została wystarczająco wyeksponowana. Inne twierdzenie pracy (Thm. 3.6) formułuje kolejne warunki wystarczające zawierania przez blok podziału kanonicznego orbity typu G_δ wraz z opisem jej elementów. Przeanalizowany jest też przypadek działania grupy $Aut(\mathbb{Q})$ na siebie przez sprzężenia, badany wcześniej w pracy [H3]. Pokazane jest (Thm. 4.5), że w tym przypadku każdy blok podziału kanonicznego zawiera orbitę typu G_δ - dowód wykorzystuje charakteryzację takich orbit, podaną w [H3].

Orbity typu G_δ są szczególnym przypadkiem tzw. towarzyszy (ang. „companion") bloków kanonicznych podziałów. Towarzysze bloku to jego niezmiennicze, gęste podzbiory typu G_δ, na których obie topologie polskie, rozpatrywane na X: wyjściowa oraz jej przyjemne rozszerzenie, są zgodne. Pojęcie to, poddane w pracy szczegółowej analizie, ma swoje korzenie w teorii modeli, co autorka szczegółowo uzasadnia.

Chronologicznie najpóźniejsze z prac, wchodzących w skład Rozprawy, czyli opublikowane w 2012 r. prace [H2] oraz [H1], poświęcone są ciągłym działaniom dowolnych grup polskich.

Praca [H2] (opublikowana w Archive for Math. Log.) jest również inspirowana teorią modeli, mianowicie pewnym twierdzeniem J. Barwise'a i M. Nadela, ale chodzi w niej o odpowiedź na ogólne pytanie, do jakiego stopnia orbity można w pewnym sensie przybliżać za pomocą niezmienniczych zbiorów borelowskich o ograniczonym z góry stopniu skomplikowania ich definicji. W szczególności pokazane jest (Thm. 2), że w sytuacji, gdy zarówno grupa G jak przestrzeń X są reprezentowalne rekurencyjnie oraz działanie grupowe i działanie G na X są hiperarytmetyczne, to z tego, że orbity elementu hiperarytmetycznego x nie da się oddzielić od orbity elementu y za pomocą niezmienniczego zbioru hiperarytmetycznego wynika, że nie da się tego również zrobić za pomocą borelowskiego zbioru niezmienniczego klasy ω_1^{CK}. Przyznam, że ta praca mniej mi się podoba. Zawiera ona długi wstęp, mający charakter artykułu przeglądowego, następnie dość rutynowy - jak mi się wydaje - dowód efektywnej wersji pewnego lematu Hjortha i w końcu dwa krótkie i łatwe dowody głównych twierdzeń, oparte na innym lemacie Hjortha. Niewątpliwą zasługą habilitantki jest jednak zauważenie, że pewna znaleziona przez Hjortha technika analizy stopnia złożoności orbit, prowadzi do krótkich dowodów uogólnień twierdzenia Barwise'a i Nadela.

Natomiast praca [H1] (opublikowana w Math. Log. Quart.) robi na mnie wrażenie bardzo interesującej. Poświęcona jest badaniu orbit ciągłego działania grupy G na przestrzeni X za pomocą wprowadzonego przez Hjortha systemu tzw. niezmienników Hjortha-Scotta. Posługując się nimi można każdej przeliczalnej liczbie porządkowej α przyporządkować podział przestrzeni X na niezmiennicze zbiory borelowskie. Podziały te wraz ze wzrostem indeksu α są coraz drobniejsze, a pierwszym z nich jest zdefiniowany przez Beckera podział kanoniczny, rozważany w pracy [H4] Rozprawy. Hjorth pokazał, że w przypadku, gdy G jest grupą niearchimedesową, ciąg tych podziałów zbiega punktowo do podziału na orbity: dla każdego punktu $x \in X$ istnieje taka przeliczalna liczba α, że orbita punktu x jest blokiem podziału o indeksie α (i każdego podziału o indeksie większym niż α), do którego x należy. Jest to własność o charakterze strukturalnym, zwana pełnością systemu niezmienników Hjortha-Scotta. Głównym wynikiem pracy i - na moje wyczucie - najważniejszym wynikiem całej Rozprawy, jest bardzo interesujące twierdzenie (Thm. 3.7), pokazujące elegancką charakteryzację tych działań dowolnej grupy polskiej, dla których system niezmienników Hjortha-Scotta jest pełny. Są to mianowicie takie działania, że dla każdego $x \in X$ i dowolnego otoczenia V elementu neutralnego grupy G zbiór Vx zawiera lokalną orbitę elementu

x. Działania te habilitantka nazywa działaniami ostatecznie otwartymi. Charakteryzacja ta może stanowić punkt wyjścia do naturalnego pytania o to, działania jakich jeszcze grup, poza działaniami grup niearchimedesowych i jednym przykładem podanym w pracy (grupa liczb rzeczywistych), są ostatecznie otwarte.

Omówione prace, wchodzące w skład Rozprawy, zwłaszcza artykuły [H4] i [H1], dotyczą trudnych technicznie zagadnień. Zostały one opublikowane w solidnych branżowych czasopismach o światowym zasięgu. Prace te pokazują, że habilitantka biegle włada narzędziami i metodami, rozwiniętymi przez Beckera, Hjortha i Kechrisa (rozszerzanie topologii, operacje Vaughta, niezmienniki Hjortha-Scotta) oraz potrafi je zastosować do osiągnięcia oryginalnych, ciekawych wyników. Wyniki te dotyczą w szczególności nowych, w naturalny i trafny sposób wprowadzonych przez nią samą pojęć (działanie ostatecznie otwarte). Wydaje mi się, że widać w tych pracach również, choć to w mniejszym stopniu potrafię ocenić, wysokie kwalifikacje autorki w dziedzinie teorii modeli.

W mojej ocenie Rozprawa stanowi interesujący i wartościowy wkład w rozwój niezmienniczej deskryptywnej teorii mnogości.

3. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze i dorobek dydaktyczny. Oprócz czterech omówionych już prac, wchodzących w skład Rozprawy, na podoktorski dorobek naukowy habilitantki składają się jeszcze cztery prace ([P1]-[P4], zgodnie z numeracją w Autoreferacie).

Prace [P3] i [P4] dotyczą ciekawych zagadnień z pogranicza teorii mnogości i teorii grup.

Praca [P2] właściwie mogłaby być częścią cyklu habilitacyjnego. Zawiera największy ładunek pojęć logicznych. Aparat zbiorów dopuszczalnych zastosowany jest do analizy złożoności różnych obiektów związanych z działaniami grup niearchimedesowych.

Moją szczególną uwagę zwróciła praca [P1]. Jej punktem wyjścia jest twierdzenie Kechrisa, opisujące strukturę borelowskiego działania grup polskich lokalnie zwartych. Przeprowadzona jest dokładna analiza, jak ta struktura wygląda w przypadku pewnych zwartych grup homeomorfizmów zbioru Cantora, reprezentowanego jako zbiór gałęzi drzewa.

Na pozostały dorobek naukowo-badawczy oraz dydaktyczny habilitantki składają się wystąpienia konferencyjne (siedem referatów w latach 2001-2011, w tym jeden zaproszony wykład na Logic Colloquium'2006) oraz opieka nad siedemnastoma pracami magisterskimi (w tym samym okresie).

4. Konkluzja. **Uważam, że przedstawione do oceny osiągnięcie naukowe w postaci jednotematycznego cyklu publikacji oraz pozostałe osiągnięcia i dorobek pani dr Barbary Majcher-Iwanow spełniają wymogi ustawowe i uzasadniają nadanie jej stopnia naukowego doktora habilitowanego.**