Autoreferat

Anna Wysoczańska-Kula

Wrocław, 2018

1 Podstawowe informacje

Imię i nazwisko: Anna Wysoczańska-Kula
Adres: Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego,
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
Email: anna.kula@math.uni.wroc.pl
WWW: http://www.math.uni.wroc.pl/∼akula

Dyplomy i stopnie naukowe:

2004 Dyplom magistra matematyki, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków;
Praca magisterskia pt.: „Operatory podobne do kontrakcji" napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Jan Stochela

2008 Stopień doktora w zakresie nauk matematycznych, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków;
Rozprawa doktorska pt.: „Deformacje dodatniej określoności i calkowitej monotoniczności" napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Franciszka Hugona Szafrańca

Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

2008-2011 Asystent, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

2010–2011 Postdoc, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Université de Franche-Comté, Besançon (Francja)

2011-2012 Adiunkt, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków

2012-2014 Postdoc, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet Wrocławski (FUGA NCN)

2014- Adiunkt, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet Wrocławski

2 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego

1. Tytuł osiągnięcia naukowego

Zwarte grupy kwantowe i procesy Lévy'ego na nich

2. Lista publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego

[H1] Anna Kula; Construction of a compact quantum group for transposition-coloring function. *Probab. Math. Statist.* 33 (2013), no. 2, 287–299. ISSN 0208-4147.
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pms/download.php?file=files/33.2/Article/33.2.10.pdf`

[H2] Anna Kula; Woronowicz construction of compact quantum groups for functions on permutations. Classification result for N=3. *J. Math. Anal. Appl.* 421 (2015), no. 2, 1673–1712.
`https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.007`

[H3] Fabio Cipriani, Uwe Franz, Anna Kula; Symmetries of Lévy processes on compact quantum groups, their Markov semigroups and potential theory. *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 5, 2789–2844.
`https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.026`

[H4] Biswarup Das, Uwe Franz, Anna Kula, Adam Skalski; One-to-one correspondence between generating functionals and cocycles on quantum groups in presence of symmetry. *Math. Z.* 281 (2015), no. 3-4, 949–965.
`https://doi.org/10.1007/s00209-015-1515-7`

[H5] Uwe Franz, Anna Kula, Adam Skalski; Lévy processes on quantum permutation groups. W: *Noncommutative analysis, operator theory and applications*, 193–259, Oper. Theory Adv. Appl., 252, Linear Oper. Linear Syst., Birkhäuser/Springer, 2016.
`https://doi.org/10.1007/978-3-319-29116-1_11`

[H6] Biswarup Das, Uwe Franz, Anna Kula, Adam Skalski; Lévy-Khintchine decompositions for generating functionals algebras associated to universal compact quantum groups. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* Vol. 21, No. 3 (2018), 1850017 (36 pages)
`https://doi.org/10.1142/S0219025718500170`

Mój udział w pracach współautorskich jest oceniony na załączonych oświadczeniach.

3 Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

3.1 Wstęp

Grupy kwantowe są uogólnieniem klasycznych grup, które odzwierciedlają symetrie przestrzeni nieprzemiennych. Korzenie tej teorii sięgają drugiej połowy XX wieku – odkryć algebr Hopfa oraz prób użycia ich w fizyce kwantowej i kwantowej teorii grawitacji. Aspekt algebraiczny całej teorii pochodzi z prac V.G. Drinfel'da i M. Jimbo, [Dri87, Jim85], którzy opisali kwantowe deformacje klasycznych algebr Liego. Podejście analityczne zawdzięczamy S.L. Woronowiczowi [W87b], który wprowadził i zaksjomatyzował pojęcie zwartej grupy kwantowej. Zostało ono następnie uogólnione na przypadek lokalnie zwarty przez S.L. Woronowicza [W96], a następnie w silniejszej wersji przez J. Kustermansa i S. Vaesa [KV00].

Dzisiaj znamy już nie tylko wiele konkretnych przykładów zwartych grup kwantowych, ale także kilka ogólnych schematów uzyskiwania takich obiektów, np. przez kwantyzację algebr Liego, poprzez 'uwolnienie' (ang. *liberation*, opisane przez Banicę i Speichera [BSp09]), przez *konstrukcję Woronowicza* (której poświęcone są moje prace [H1] i [H2]), oraz, bardziej ogólnie poprzez twierdzenie rekonstrukcyjne typu Tannaki-Kreina ([W88]). Warto wspomnieć, że grupy kwantowe występują w różnych postaciach: jako algebry operatorów (C*-algebry lub algebry von Neumanna), jako algebry Hopfa czy jako kategorie tensorowe. Często informacji o grupie kwantowej dostarcza badanie różnych aspektów tego samego obiektu lub interakcji między nimi.

Okazuje się, że grupy kwantowe stanowią właściwe środowisko dla uogólnienie dualności Pontrjagina na grupy nieprzemienne (np. [Kac61]), wprowadzają właściwe pojęcie symetrii w teorii podfaktorów Jonesa (np. [Ban99]), stanowią naturalne źródło modeli dla nieprzemiennej probabilistyki (np. [KoSp09], [BC07]), a także odgrywają istotną rolę w nieprzemiennej geometrii (np. [Co04a]). To wzajemne oddziaływanie między nieprzemienną probabilistyką i nieprzemienną geometrią staje się jeszcze bardziej widoczne, gdy badamy odpowiedniki procesów Lévy'ego na grupach kwantowych (a dokładniej na ich gęstych podalgebrach Hopfa).

W klasycznej probabilistyce procesy Lévy'ego to procesy o niezależnych i stacjonarnych przyrostach. Stanowią on modele wielu interesujących procesów zachodzących w świecie materialnym (ruch cząsteczek, kursy akcji), a najbardziej znanymi ich przykładami są ruchy Browna i proces Poissona. Nieprzemienne odpowiedniki procesów Lévy'ego (pierwotnie nazywane "białym szumem") pojawiły się najpierw w kontekście $*$-bialgebr z gradacją $\mathbb{Z}_2$ (ang. $\mathbb{Z}_2$-graded $*$-bialgebras) w pracy [ASvW88], a następnie zostały rozszerzone na dowolne $*$-bialgebry z gradacją i $*$-bialgebry warkoczowe [Sch93] oraz grupy dualne [Sch95]. Wobec faktu, że każda zwarta grupa kwantowa posiada gęstą podalgebrę Hopfa (czyli w szczególności $*$-bialgebrę), naturalna stała się próba badania procesów Lévy'ego w kontekście grup kwantowych, podjęta w pracy [H3].

Definicja procesu Lévy'ego na $*$-bialgebrze jest ogólnie mówiąc taka sama, jak w przypadku klasycznym: jest to rodzina zmiennych losowych o przyrostach stacjonarnych i niezależnych. To, co sie zmienia, to znaczenie poszczególnych słów w powyższej definicji: zmienne losowe to nieprzemienne zmienne losowe (czyli $*$-homomorfizmy zdefiniowane na $*$-bialgebrze), niezależność to jedna z kilku możliwych niezależności nieprzemiennych (w naszym przypadku tzw. niezależność tensorowa) i wreszcie przyrosty to tak naprawdę elementy procesu, których składanie jest możliwe dzięki strukturze bialgebry (komnożeniu).

W analogii to sytuacji klasycznej, każdemu nieprzemiennemu procesowi Lévy'ego na zwartej grupie kwantowej odpowiada jednoznacznie zespolony funkcjonał (nazywany *funkcjonałem generującym*) na gęstej $*$-bialgebrze danej grupy kwantowej oraz – poprzez konstrukcję typu GNS – tzw. *trójka Schürmanna*, złożona z $*$-reprezentacji, kocyklu i funkcjonału. Powyższa zależność pozwala sprowadzić problemy probabilistyczne, np. kwestię klasyfikacji procesów Lévy'ego czy opisu ich symetrii, do badania obiektów natury algebraicznej. Już w pierwszych latach rozwoju tej teorii ([Sch90]) zauważono też, że istotną rolę w klasyfikacji i konstruowaniu procesów Lévy'ego na $*$-bialgebrach odgrywa teoria kohomologii. Na przykład, standardowe podejście do klasyfikacji procesów Lévy'ego na danej grupie kwantowej polega na opisaniu wszystkich trójek Schürmanna, czyli najpierw na sklasyfikowaniu wszystkich $*$-reprezentacji algebry grupy kwantowej działających na przestrzeni Hilberta, potem na ustaleniu wszystkich związanych z tą reprezentacją kocykli (co jest równoważne znalezieniu pierwszej grupy kohomologii) i wreszcie na sprawdzeniu, które z kocykli posiadają funkcjonały generujące (co z kolei jest związane z liczenie drugiej grupy kohomologii z trywialnymi współczynnikami).

Temat ten jest blisko związany z problemem istnienia rozkładu typu Lévy'ego-Chinczyna. Klasycznie, rozkład ten oznacza, że dowolny proces Lévy'ego można rozłożyc na część gaussowską (ruch Browna z dryfem) i część skokową. Pytanie, czy taki rozkład zachodzi także dla procesów Lévy'ego na $*$-bialgebrach zostało postawione przez M. Schürmanna [Sch90]. Dziś wiemy już, że odpowiedź na nie jest przecząca [FGT15], ale wciąż nie wiemy, jak scharakteryzować te $*$-bialgebry czy grupy kwantowe, które mają rozkład Lévy'ego-Chinczyna. Mój wkład w badanie tego problemu jest opisany w pracach [H4], [H5] i [H6].

Grupy kwantowe są także przykładami przestrzeni nieprzemiennych i jako takie były już intensywnie badane (patrz np. [CP03a], [DLSSV05]). Jednakże nieprzemienne procesy Lévy'ego wprowadzają nową perspektywę w patrzeniu na grupy kwantowe jako obiekty geomtryczne. W pracach [H3] i (częściowo także) w [H5], badaliśmy symetrie półgrup Markova związanych z procesami Lévy'ego na grupach kwantowych i pokazaliśmy, że takie procesy mogą przenosić geometryczne informacje o przestrzeni, na której "żyją".

W pozostałej części Autoreferatu omawiam dokładniej wyniki prac [H1]-[H6]. W podrozdziale 3.3 omówiam badania prowadzone nad konstrukcją Woronowicza zwartych grup kwantowych, będące tematyką prac [H1] i [H2]. W kolejnym podrozdziale opisuję badania symetrii procesów Lévy'ego zawarte w pracach [H3] oraz [H5]. Podrozdział 3.5 poświęcony jest problemowi istnienia rozkładu Lévy'ego-Chinczyna na zwartych grupach kwantowych (prace [H4]-[H6]). W podrozdziale 3.6 omawiam związki między procesami Lévy'ego a grupami kohomologii Hochschilda i wyniki uzyskane w pracy [H6]. Dla wygody Czytelnika, w podrozdziale 3.2 zebrałam najważniejsze fakty dotyczące zwartych grup kwantowych oraz omówiłam przykłady pojawiające się w dalszej części autoreferatu – służy to przede wszystkim ustaleniu oznaczeń. Ponadto w każdym z podrozdziałów omówienie moich wyników poprzedzone jest wprowadzeniem niezbędnych definicji i faktów właściwych dla tego fragmentu. W związku z niejednolitym systemem oznaczeń stosowanych w pracach [H1]-[H6], niektóre oznaczenia w niniejszym tekście różnią się od oznaczeń z prac oryginalnych.

3.2 Definicja i przykłady zwartych grup kwantowych

Istnieją różne (nie zawsze równoważne) definicje grup kwantowych. Definicją bazową dla moich badań jest ta sformułowana przez S.L. Woronowicza [W98].

DEFINICJA 3.1. Parę $\mathbb{G} = (\mathsf{A}, \Delta)$, złożoną z C^*-algebry z jedynką A i zachowującego jedynkę $*$-homomorfizmu $\Delta : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \otimes \mathsf{A}$, nazywamy *zwartą grupą kwantową*, jeśli Δ jest *kołączne*:

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta,$$

oraz jeśli zachodzi *kwantowe prawo skracania*:

$$\overline{\mathrm{Lin}}\{\Delta(a)(1 \otimes b) : a, b \in \mathsf{A}\} = \overline{\mathrm{Lin}}\{\Delta(a)(b \otimes 1) : a, b \in \mathsf{A}\} = \mathsf{A} \otimes \mathsf{A}.$$

W powyższej definicji $\otimes$ oznacza minimalny iloczyn tensorowy C*-algebr, a $\overline{\mathrm{Lin}}\, F$ – domknięcie zbioru kombinacji liniowych elementów z F. Zwyczajowo Δ nazywa się *komnożeniem* oraz pisze się $\mathsf{A} = C(\mathbb{G})$.

Macierz unitarną $u = (u_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(C(\mathbb{G}))$ nazywamy (skończenie wymiarową) *reprezentacją unitarną* grupy $\mathbb{G}$, jeśli

$$\Delta(u_{jk}) = \sum_{p=1}^{n} u_{jp} \otimes u_{pk}, \quad j, k = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

elementy u_{jk} nazywane są *współczynnikami* u. Rozpięcie liniowe wszystkich współczynników skończenie wymiarowych reprezentacji unitarnych $\mathbb{G}$ jest gęstą $*$-podalgebrą z jedynką algebry $\mathrm{C}(\mathbb{G})$, zwykle oznaczaną $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$, która okazuje się posiadać strukturę $*$-algebry Hopfa. Komnożenie w $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ jest dziedziczone z $C(\mathbb{G})$, a kojedynka ε i koodwrotność S są zdefiniowane przez

$$\varepsilon(u_{jk}) = \delta_{jk}, \quad S(u_{jk}) = (u^{-1})_{jk}. \tag{2}$$

W szczególności, każda zwarta grupa kwantowa indukuje $*$-bialgebrę $(\mathrm{Pol}(\mathbb{G}), \Delta, \varepsilon)$.

Na każdej zwartej grupie kwantowej $\mathbb{G}$ istnieje jedyny niezmienniczy stan h, zwany stanem Haara. Stan h spełnia warunek KMS [BR97, Definition 5.3.1], tzn. istnieje taka grupa automorfizmów modularnych $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i jej rozszerzenie analityczne $(\sigma_z)_{z\in\mathbb{C}}$, że zachodzi warunek

$$h(ab) = h(b\sigma_{-i}(a)), \quad a, b \in A. \tag{3}$$

Automorfizmy modularne $(\sigma_z)_{z\in\mathbb{C}}$ powstają z tzw. charakterów Woronowicza $(f_z)_{z\in\mathbb{C}}$, [W98, Theorem 1.4]. Charaktery Woronowicza służą też do zdefiniowania drugiej grupy, tym razem $*$-automorfizmów, tzw. automorfizmów skalujących (ang. *scaling automorphisms*) $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$, posiadającej rozszerzenie analityczne do $(\tau_z)_{z\in\mathbb{C}}$. Automorfizmy skalujące pozwalają wydzielić z koodwrotności S część unitarną, tzw. *koodwrotność unitarną* R: $S = R \circ \tau_{i/2}$ (więcej szczegółów w [W98, Theorem 1.6] wraz z dowodem). Jeśli stan Haara jest śladem (co jest równoważne z faktem, że $S^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Pol}(\mathbb{G})}$), to grupę kwantową $\mathbb{G}$ nazywamy *typu Kaca*.

Przykładami zwartych grup kwantowych są C*-algebry funkcji ciagłych na grupach zwartych $C(G)$. Co więcej, Woronowicz w [W87b] pokazał, że dowolna *przemienna* zwarta grupa kwantowa (czyli G z przemienną algebrą A) jest izomorficzna z C*-algebrą funkcji ciągłych na pewnej grupie zwartej. Z drugiej strony, dowolna *koprzemienna* zwarta macierzowa grupa kwantowa (czyli $\mathbb{G}$

taka, że $\sigma \circ \Delta = \Delta$, gdzie $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$) jest izomorficzna z C*-algebrą generowaną przez operatory postaci $U(\gamma_j)$, dla $j = 1, 2, \ldots, m$, gdzie $U : \Gamma \to B(H)$ jest unitarną wierną reprezentacją skończenie generowanej grupy dyskretnej Γ na przestrzeni Hilberta H, taką, że $U \otimes U$ jest zawarte w wielokrotności U, a $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ jest zbiorem generatorów Γ. Takie grupy kwantowe dostajemy w szczególności z C*-algebry zbudowanej względem reprezentacji regularnej $C^*_r(\Gamma)$ oraz reprezentacji uniwersalnej $C^*_u(\Gamma)$.[1]

Powyższe rodziny przykładów, czyli grupy kwantowe przemienne lub koprzemienne, pochodzą ze świata klasycznych grup, dlatego w odniesieniu do nich będę stosowała przymiotnik *trywialne*. Pozostałe grupy, czyli takie nie pochodzące od żadnej z grup klasycznych, będę nazywała *nietrywialnymi*. Podkreślam, że jest to tylko wygodna w użyciu nazwa, a nie uznanie pozostałych przypadków za nieinteresujące.

Szczególną klasą zwartych grup kwantowych są zwarte *macierzowe* grupy kwantowe ([W87b], także [vDW96]), które otrzymuje się przy dodatkowym założeniu istnienia takiej skończenie wymiarowej reprezentacji unitarnej u grupy $\mathbb{G}$, że jej współczynniki u_{jk}, $j, k = 1, \ldots, n$, generują A jako C*-algebrę. Wówczas komnożenie jest jednoznacznie zdefiniowane wzorem (1). W takiej sytuacji zwykle piszemy $\mathbb{G} = (\mathsf{A}, u)$, a u nazywamy *reprezentacją fundamentalną*. Wówczas też $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ jest generowana (jako $*$-algebra) przez współczynniki macierzy u. Dla macierzy $u = (u_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(\mathsf{A})$, definiujemy macierz transponowaną u^t oraz macierz o wyrazach sprzężonych $\bar{u}$:

$$u^t := (u_{kj})_{j,k=1}^n, \quad \bar{u} := (u^*_{jk})_{j,k=1}^n. \tag{4}$$

Kilka zwartych (macierzowych) grup kwantowych ważnych dla dalszej części opisu prezentuję poniżej.

Przykład 3.2 (Wolna grupa permutacji). Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $C(S_n^+)$ oznacza uniwersalną C^*-algebrę z jedynką generowaną przez rodzinę projekcji ortogonalnych $\{p_{jk}; j, k = 1, \ldots, n\}$, spełniających warunki

$$\sum_{j=1}^n p_{jk} = \sum_{k=1}^n p_{kj} = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Wówczas $S_n^+ = (C(S_n^+), p)$, $p = (p_{jk})_{j,k=1}^n$, jest zwartą macierzową grupa kwantową, zwaną *wolną grupą permutacji* n elementów.

Definicja S_n^+ pochodzi od S. Wanga [Wan98]. Jeśli podzielimy S_n^+ przez $*$-ideał generowany przez komutatory (czyli założymy, że wszystkie elementy są przemienne), to otrzymamy C*-algebrę funkcji ciągłych na (klasycznej) grupie permutacji S_n. W tym sensie S_n^+ jest kwantowym odpowiednikiem S_n.

Grupa S_n^+ jest stosunkowo dobrze zbadana (więcej o niej można znaleźć np. w pracach [BBC07], [Ban12] czy [Ska14]). W szczególności, S_n^+ jest typu Kaca ($S^2 = \mathrm{id}$). Dla $n = 1, 2, 3$, mamy $C(S_n^+) = C(S_n)$, czyli algebra wolnej grupy permutacji jest przemienna. Dla $n \geq 4$, $C(S_n^+)$ jest nieprzemienna i nieskończenie wymiarowa. Dla $n = 4$, S_4^+ może być przedstawiona jako deformacja klasycznej grupy $SO(3)$ group, patrz [BB09]. Dla $n \geq 5$, C^*-algebra $C(S_n^+)$ nie jest typu I.□

[1] Nie jest łatwo znaleźć przykłady grup kwantowych tego typu nie pochodzących ani od reprezentacji uniwersalnej, ani od regularnej. Jedną z takich 'egzotycznych' reprezentacji opisuje praca [3].

Przykład 3.3 (Uniwersalne grupy kwantowe). Dla $n \in \mathbb{N}$ i macierzy odwracalnej $F \in GL_n(\mathbb{C})$ definiujemy $C(U_F^+)$ jako uniwersalną C*-algebrę z jedynką generowaną przez n^2 takich elementów u_{jk} ($j, k = 1, 2, \ldots, n$), że macierz $u := (u_{jk})_{j,k=1}^n$ jest unitarna, a jej macierz o wyrazach sprzężonych, $\bar{u}$, jest podobna do macierzy unitarnej z dokladnością do F. Oznacza to, że w algebrze $C(U_F^+)$ spełnione są (te i tylko te) relacje

$$uu^* = I = u^*u, \qquad F\bar{u}F^{-1}(F\bar{u}F^{-1})^* = I = (F\bar{u}F^{-1})^*F\bar{u}F^{-1}. \tag{5}$$

Uniwersalną unitarną grupą kwantową (wymiaru n związaną z macierzą F) nazywamy zwartą macierzową grupę kwantową $U_F^+ = (C(U_F^+), u)$.

W podobny sposób, dla $F \in GL_n(\mathbb{C})$ takiej, że $F\bar{F} \in \mathbb{R} \cdot I$, można zdefiniować *ortogonalną uniwersalną grupę kwantową* $O_F^+ = (C(O_F^+), v)$ wymiaru $n \in \mathbb{N}$ związaną z macierzą F. Wówczas $C(O_F^+)$ jest uniwersalną C*-algebrą z jedynką generowaną przez n^2 takich elementów v_{jk} ($j, k = 1, 2, \ldots, n$), że macierz $v := (v_{jk})_{j,k=1}^n$ jest unitarna oraz $\bar{v} = F^{-1}vF$. Łatwo sprawdzić, że O_F^+ jest podgrupą kwantową U_F^+, w której algebrę $C(U_F^+)$ należy podzielić przez (ideał generowany przez) dodatkową relację $uF = F\bar{u}$.

Powyższe definicje zostały wprowadzone przez A. van Daele i S. Wanga [vDW96] i przeformułowane do powyższej postaci przez T. Banicę [Ban97]. W szczególnym przypadku, gdy $F = I$, mówimy o *wolnej unitarnej*, odpowiednio – *ortogonalnej, grupie kwantowej* i oznaczamy U_n^+, odp. O_n^+. Jeśli $F = F'U$ dla pewnej macierzy unitarnej U, to grupy U_F^+ i $U_{F'}^+$ są izomorficzne. Podobnie, jeśli $F' = UFU^t$ dla pewnej macierzy unitarnej U i $F'\overline{F'} \in \mathbb{R} \cdot I$, grupy O_F^+ i $O_{F'}^+$ są izomorficzne. Uniwersalność rodziny $\{U_F^+; F \in M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}\}$ polega na tym, że dowolna inna zwarta macierzowa grupa kwantowa jest podgrupą kwantową pewnej U_F^+ (dowód tego faktu oraz odpowiednie sformułowanie uniwersalności dla rodziny ortogonalnej można znaleźć w [Ban97] i w [Tim08]).□

Przykład 3.4 (Grupa kwantowa $SU_q(n)$). Niech $n \in \mathbb{N}$ i $q \in (0, 1)$. Algebra $C(SU_q(n))$ jest zdefiniowana jako uniwersalna C*-algebra z jedynką, generowana przez współrzędne macierzy $u = (u_{jk})_{j,k=1}^n$ spełniające warunek unitarności $uu^* = u^*u = I$ i warunek skręconego wyznacznika

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{i(\sigma)} u_{\sigma(1),\tau(1)} u_{\sigma(2),\tau(2)} \cdots u_{\sigma(n),\tau(n)} = (-q)^{i(\tau)} \cdot 1, \quad \tau \in S_n, \tag{6}$$

gdzie S_n oznacza grupę permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $i(\tau)$ oznacza liczbę inwersji w permutacji τ. Para $SU_q(n) = \big(C(SU_q(n)), u\big)$ jest zwartą macierzową grupą kwantową (patrz [W88]).

Przypadek specjalny, grupa $SU_q(2)$, zdefiniowana przez S.L. Woronowicza w [W87b], jest historycznie pierwszym, a prawdopodobnie także najbardziej znanym i najlepiej zbadanym przykładem zwartej grupy kwantowej. Jej algebra $C(SU_q(2)$ jest generowana przez dwa elementy, zwykle oznaczane α i γ, które spełniają relacje

$$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1, \quad \alpha\alpha^* + q^2\gamma\gamma^* = 1,$$
$$\gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \quad \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \quad \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha.$$

Wiadomo [vD93, Lemma 4.7], że $SU_q(n)$ jest podgrupą kwantową U_F^+ dla $F = (q^{j-n}\delta_{jk})_{j,k=1}^n$. □

3.3 Zwarte grupy kwantowe pochodzące z konstrukcji Woronowicza

Konstrukcja podana przez S.L. Woronowicza w pracy [W88] opisuje elegancką metodę tworzenia zwartych macierzowych grup kwantowych poprzez zadanie odpowiedniej funkcji na zbiorze ciągów n-elementowych. Zgodnie z tą metodą uniwersalna C*-algebra z jedynką generowana przez macierz $n \times n$, spełniającą warunek unitarności (U) oraz zmodyfikowany warunek wyznacznika (TD), posiada strukturę takiej grupy kwantowej. Modyfikacja warunku (TD) polega na wybraniu n^n stałych zespolonych $E = (E_{i_1,\dots,i_n})_{i_1,\dots,i_n=1}^n$, tworzących 'niezdegenerowaną tablicę liczb'.

Dokładniej, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ rozpatrujemy funkcję $E : \{1, 2, \dots, n\}^n \to \mathbb{C}$. Mówimy, że E jest *niezdegenerowana lewostronnie*, jeśli funkcje $E_{1-}, \dots, E_{n-}$ są liniowo niezależne, przy oznaczeniu $E_{k-} = [E_{k,i_2,\dots,i_n}]_{i_2,\dots,i_n=1}^n$. Podobnie, mówimy, że E jest *niezdegenerowana prawostronnie*, jeśli funkcje $E_{-1}, \dots, E_{-n}$ są liniowo niezależne, gdzie $E_{-k} = [E_{i_1,\dots,i_{n-1},k}]_{i_1,\dots,i_{n-1}=1}^n$.

Twierdzenie 3.5 (Konstrukcja Woronowicza, [W88, Theorem 1.4]). *Niech $E : \{1, 2, \dots, n\}^n \to \mathbb{C}$ będzie funkcją niezdegenerowaną prawo- i lewostronnie i niech A_E będzie uniwersalną C*-algebrą z jedynką, generowaną przez współczynniki macierz $u = (u_{jk})_{j,k=1}^n$ spełniające warunki*

a) **unitarności***:*

$$\forall_{j,k=1,\dots,n} \quad \sum_{s=1}^n u_{js} u_{ks}^* = \delta_{jk} 1_{\mathsf{A}} = \sum_{s=1}^n u_{sj}^* u_{sk}, \tag{U}$$

b) **skręconego wyznacznika***:*

$$\forall_{a_1,\dots,a_n \in \{1,\dots,n\}} \quad \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^n E_{i_1,i_2,\dots,i_n} u_{a_1 i_1} u_{a_2 i_2} \dots u_{a_n i_n} = E_{a_1,a_2,\dots,a_n} \cdot 1_{\mathsf{A}}. \tag{TD}$$

Wówczas para $\mathbb{G}_E = (\mathsf{A}_E, u)$ jest zwartą (macierzową) grupą kwantową.

Opisaną w powyższym twierdzeniu grupę kwantową $\mathbb{G}_E$ będziemy nazywać *zwartą grupą kwantową pochodzącą z konstrukcji Woronowicza dla funkcji E*. Struktura grupy kwantowej jest zadana jednoznacznie poprzez fakt, że u jest reprezentacją fundamentalną $\mathbb{G}$, czyli muszą zachodzić wzory (1) i (2). Ponadto, warunek unitarności (U) implikuje, że $S(u_{jk}) = u_{jk}^*$.

Warunek niezdegenerowania E jest bardzo ogólny i pozostawia dużą swobodę w wyborze stałych (np. dowolna funkcja na permutacjach o wartościach niezerowych pozwala zdefiniować niezdegenerowaną funkcję E), dlatego konstrukcja wydawała się być bardzo ogólna. Tymczasem do niedawna znanych było zaledwie kilka grup kwantowych, uzyskanych przy jej pomocy (i nietrywialnych, czyli nie pochodzących od grup klasycznych). Była to przede wszystkich rodzina $SU_q(n)$, opisana przez Woronowicza w pracy [W88] jako zastosowanie stworzonej konstrukcji. Odpowiada jej funkcja

$$E_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \begin{cases} (-q)^{|\sigma|}, & \text{gdy } \sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

(patrz Przykład 3.4). W 1998, E.C. Lance zdefiniował grupę $SO_q(3)$ jako obiekt powstający z konstrukcji Woronowicza dla $n = 3$ i funkcji E przyjmującej niezerowe wartości dla

$$E_{123} = 1,\ E_{132} = E_{213} = -q,\ E_{231} = E_{312} = q,\ E_{321} = -q^2,\ E_{222} = \sqrt{q}(1-q),$$

z dodatkowymi założeniami $u_{22} = u_{22}^*$, $u_{11} = u_{33}^*$, $u_{12} = \sqrt{q}u_{32}^*$. Ściśle mówiąc, $SO_q(3)$ Lance'a jest zatem podgrupą

(niezbadanej dotąd) grupy kwantowej powstającej z konstrukcji Woronowicza dla podanych wartości E, której generatory spełniają dodatkowe relacje. W 2004, J. Wysoczański [Wys04] zastosował konstrukcję Woronowicza do $n = 3$ i $E(\sigma) = (-q)^{3-c(\sigma)}$ dla $\sigma \in S_n$ oraz $E_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = 0$ w przeciwnym przypadku, uzyskując grupę $U_q(2)$ (zdefiniowaną w [Koe91]). Tutaj, $c(\sigma)$ oznacza liczbę cykli w rozkładzie permutacji σ. Wreszcie, w 2013 J. Bichon i M. Dubois-Violette [BD13] pokazali, że kwantowa grupa refleksji H_n^{m+}, opisana w pracy [BV09], powstaje z konstrukcji Woronowicza dla $E_{i,i,\ldots,i} = 1$ oraz $E_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Niewielka liczba przykładów obiektów pochodzących z konstrukcji Woronowicza wyraźnie kontrastowała z dowolnością wyboru funkcji E. Dlatego w sposób naturalny pojawiło się pytanie: jakiego typu funkcje E prowadzą – poprzez konstrukcję Woronowicza – do (nietrywialnych) grup kwantowych? Tematowi temu zostały poświęcone dwie pierwsze prace wchodzące w skład osiągniecia naukowego ([H1] i [H2]).

Warto w tym miejscu wspomnieć, że dla wymiaru $n = 2$ można pokazać, że dowolna grupa kwantowa pochodząca z konstrukcji Woronowicza jest izomorficzna albo z torusem (czyli jej algebra jest izomorficzna z $C(T)$) albo z kwantową grupą $SU_q(2)$ dla pewnego $q \in \mathbb{R}^*$.[2] Można to wytłumaczyć niskim wymiarem, czyli niewielką swobodą w wyborze stałych (*de facto* dla $n = 2$ wybieramy trzy parametry, bo podzielenie współczynników funkcji E przez stałą nie zmienia relacji w grupie kwantowej). Wydawało się jednak, że dla wyższych wymiarów możliwości uzyskania ciekawych grup kwantowych są znacznie większe. Rzeczywistość matematyczna okazała się inna.

Najpierw udało mi się znaleźć nietrywialną grupę kwantową pochodzącą z konstrukcji Woronowicza dla $n = 4$, co opisałam w pracy [H1]. Grupa ta jest związana z *funkcją kolorującą inwersje* na permutacjach czteroelementowych, opisaną w [BS94, Section 5]. Jest ona zdefiniowana następująco: niech $\pi_k := (k, k+1)$, $k = 1, 2, 3$, oznaczają inwersje grupy permutacji czteroelementowych S_4 (generują on S_4) oraz niech $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}^*$ będą ustalonymi parametrami; na inwersjach definiujemy funkcję $E_c(\pi_k) := q_k$, a następnie rozszerzamy ją do odwzorowania $E_c : S_4 \mapsto \mathbb{R}$ przyporządkowując dowolnym permutacjom produkt wartości na różnych(!) inwersjach występujących w ich rozkładzie. Dokładniej, jeśli $\sigma \in S_4$ ma minimalny rozkład na inwersje postaci $\sigma = \pi_{j_1} \ldots \pi_{j_s}$ i jeśli

$$\{\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_s}\} = \{\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_t} : i_1 < \cdots < i_t\}, \quad \text{to} \quad E_c(\sigma) := q_{i_1} \ldots q_{i_t}.$$

W końcu funkcję E_c rozszerzamy na całe $\{1, 2, 3, 4\}^4$ kładąc zero poza S_4.

Dla przykładu, $E_c(1123) = 0$, $E_c(1243) = q_3$, bo $(1, 2, 4, 3) = \pi_3$, a $E_c(4132) = q_1q_2q_3$, bo $\sigma = (4, 1, 3, 2) = \pi_2\pi_3\pi_2\pi_1$. Poprawność definicji E wynika z relacji warkoczowych pomiędzy inwersjami ($\pi_i\pi_{i+1}\pi_i = \pi_{i+1}\pi_i\pi_{i+1}$ oraz $\pi_i\pi_j = \pi_j\pi_i$, gdy $|i - j| \geq 2$).

[2]Istotnie, jeśli $\mathbb{G}_E$ jest grupą kwantową pochodzącą z konstrukcji Woronowicza przeprowadzonej dla tablicy $E \in M_2(\mathbb{C})$, to warunki (TD) i (U) są równoważne warunkom (U) oraz $u = E^t\bar{u}(E^t)^{-1}$. Zauważmy, że dwuwymiarowa niezdegenerowana macierz $E = [E_{ij}]_{i,j=1}^2$ jest zawsze odwracalna.

Jeśli $E\overline{E} \neq cI$, to – na mocy lematu Schura – u nie jest nieprzywiedlne, czyli ma postać $u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Wówczas warunki (U) i (TD) implikują, że a jest unitarny, a $b = a^*$. Zatem $\mathbb{G}_E \cong T$.

Jeśli z kolei $E\overline{E} = cI$, wtedy $c \in \mathbb{R}^*$ i $\mathbb{G}_E$ jest izomorficzna z O_E^+, uniwersalną ortogonalną grupą kwantową (Przykład 3.3). Ale wiadomo ([Ban96, Remark]), że $O_E^+ \cong SU_q(2)$ dla pewnego $q \in \mathbb{R}^*$. Widzimy zatem, że dla $n = 2$ z konstrukcji Woronowicza można uzyskać jedynie dwa typy grup kwantowych.

W [H1] pokazałam, że grupa kwantowa $\mathbb{G}_c$ pochodząca z konstrukcji Woronowicza dla takiego E_c jest generowana przez cztery elementy a, b, x, z, które spełniają warunki: (1) a i b są elementami typu grupowego (*group-like*, czyli $\Delta(a) = a \otimes a$) oraz są unitarne i należą do centrum algebry $C(\mathbb{G}_c)$; (2) x i z generują C*-algebrę izomorficzną z $C(SU_{-1}(2))$, [Zak91], czyli spełniają relacje:

$$xx^* + zz^* = 1 = x^*x + z^*z, \quad zz^* = z^*z, \quad xz + zx = 0, \quad xz^* + z^*x = 0.$$

Wynik ten nie tylko potwierdził, że $\mathbb{G}_c$ jest nietrywialną zwartą grupa kwantową, ale także wskazał dodatkową strukturę skręconego produktu badanej grupy. Pojęcie produktu skręconego grup kwantowych zostało wprowadzone w pracy [PW90].

TWIERDZENIE 3.6 ([H1, Corollary 5.1]). *Grupa kwantowa $\mathbb{G}_c$ związana z funkcją kolorującą inwersje jest produktem skręconym swoich podgrup*

$$\mathbb{G}_c = SU_{-1}(2) \ltimes_\sigma T_2,$$

gdzie $\sigma : SU_{-1}(2) \otimes C(T_2) \to C(T_2) \otimes SU_{-1}(2)$ jest zadane

$$\sigma(1 \otimes \alpha) = \alpha \otimes 1, \qquad \sigma(x \otimes \alpha) = \alpha \otimes x, \qquad \sigma(z \otimes \alpha) = a^*b^*\alpha \otimes z \tag{7}$$

dla $\alpha \in \{1, a, b, a^*, b^*\}$.

Dzięki tej strukturze grupa kwantowa $\mathbb{G}_c$ dziedziczy wiele własności od grupy $SU_{-1}(2)$; w szczególności, pokazałam [H1, Proposition 6.1], że nieprzywiedlne $*$-reprezentacje algebry $C(\mathbb{G}_c)$ są tylko jedno- i dwu-wymiarowe – tak jak w przypadku $SU_{-1}(2)$.

Moje badania prowadzone nad konstrukcją Woronowicza i próby opisania nowych grup kwantowych dla wymiaru $n = 3$ pokazały, że przy założeniu warunku permutacji dla tablicy liczb E:

$$E_{i_1,i_2,i_3} \neq 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy} \quad (i_1, i_2, i_3) \in S_3, \tag{P}$$

konstrukcja Woronowicza bardzo często prowadzi do wyników trywialnych lub znanych. Zwykle okazywało się, że algebra generowana jest przez dwa komutujące elementy unitarne (czyli że mamy do czynienia z $C(T^2)$, algebrą funkcji ciągłych na torusie) lub że reprezentacja fundamentalna rozkłada się na dwa bloki (1×1 i 2×2) i pojawia się struktura grupy $U_q(2)$. Poczynione obserwacje pozwoliły mi znaleźć ogólną metodę badania tej konstrukcji (dla wymiaru 3), która opiera się na własnościach morfizmów splatających potęgi tensorowe reprezentacji fundamentalnej i zastępuje dość uciążliwe rachunki stosowane do tej pory. Metodę tą opisałam w pracy [H2].

Aby pokrótce opisać tę metodę, przypomnę najpierw kilka podstawowych pojęć oraz kluczowy wynik Woronowicza z pracy [W88]. Zbiór skończenie wymiarowych reprezentacji ustalonej grupy kwantowej $\mathbb{G} = (\mathsf{A}, \Delta)$, czyli macierzy $(u_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(\mathsf{A}) \cong \mathsf{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ spełniających warunek (1), jest zamknięty (między innymi) na *iloczyn tensorowy*, zdefiniowany jako

$$u \textcircled{\scriptsize T} v = \sum_{j,k=1}^{n'} \sum_{s,t=1}^{n''} m'_{jk} \otimes m''_{st} \otimes v_{jk} w_{st},$$

gdzie

$$u = \sum_{j,k=1}^{n'} m'_{jk} \otimes v_{jk}, \quad v = \sum_{s,t=1}^{n''} m''_{st} \otimes w_{st},$$

a m'_{jk} i m''_{st} oznaczają jednostki macierzowe w $M_{n'}(\mathbb{C})$ i odpowiednio w $M_{n''}(\mathbb{C})$. *Operatorem splatającym* (ang. *intertwiner*) między dwoma reprezentacjami u i v grupy kwantowej $\mathbb{G}$, wymiaru odpowiednio n' i n'', nazywamy operator liniowy $T : \mathbb{C}^{n'} \to \mathbb{C}^{n''}$ spełniający warunek

$$u(T \otimes \mathrm{id}) = (T \otimes \mathrm{id})v. \tag{8}$$

Powyżej id oznacza identyczność na A.

Każda zwarta macierzowa grupa kwantowa $\mathbb{G} = (\mathsf{A}, u)$ definiuje tzw. *zupełną konkretną W*-kategorię monoidalną* (*complete concrete monoidal W*-category*) R. W tej kategorii, objektami są skończenie wymiarowe unitarne rezprezentacje $\mathbb{G}$, a morfizmami – operatory splatające między nimi. S.L. Woronowicz wykazał ([W88, Theorem 1.3]), że każda zupełna konkretna W*-kategoria monoidalna R, w której istnieje wyróżniony obiekt u i jego sprzężenie $\bar{u}$ takie, że razem generują kategorię R, pozwala zdefinować zwartą grupę kwantową. Wówczas współczynniki macierzowe tensorowych potęg wyróżnionego obiektu $u^{\textcircled{\scriptsize T} m}$ $(m \in \mathbb{N})$ generują C*-algebrę A, a operatory splatające kodują relacje między generatorami.

W przypadku konstrukcji Woronowicza, wychodzi się od uniwersalnej C*-algebry z jedynką A generowanej przez n^2 elementów u_{jk} $(j, k = 1, \ldots, n)$ spełniających warunki (U) i (TD). Macierz $u = (u_{jk})_{j,k=1}^{n}$ stanowi wyróżniony obiekt, a iloczyny tensorowe $u^{\textcircled{\scriptsize T} m}$ $(m \in \mathbb{N})$ (po uzupełnieniu) tworzą zbiór obiektów kategorii R. Operator

$$E : \mathbb{C} \ni 1 \mapsto \sum_{i_1,\ldots,i_n} E_{i_1\ldots i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n} \in (\mathbb{C}^n)^{\otimes n},$$

zbudowany na bazie funkcji E, jest podstawowym budulcem przestrzeni morfizmów (czyli operatorów splatających) – powstają one jako kombinacje liniowe złożeń odwzorowań postać $I_k \otimes E \otimes I_l$ i $I_k \otimes E^* \otimes I_l$. Tak powstały obiekt jest zupełną konkretną W*-kategorią monoidalną, czyli definiuje zwartą grupę kwantową $\mathbb{G}_E$.

Fakt, że E jest operatorem splatającym między reprezentacją trywialną a $u^{\textcircled{\scriptsize T} 3}$ oznacza, że zachodzi warunek skręconego wyznacznika (TD). Zbudowane z niego operatory

$$P = (E^* \otimes I_1)(I_1 \otimes E), \quad Q = (E^* \otimes I_2)(I_2 \otimes E), \quad T := (I_1 \otimes R^*)E$$

kodują odpowiednio: (nie)rozkładalność reprezentacji fundamentalnej, relacje komutacji między dwoma elementami oraz własności modularne (patrz [H2, Theorem 3.2, Proposition 4.1, Proposition 3.3]). Badanie tych relacji pozwala uzyskać informacje o strukturze grupy kwantowej, a w niektórych przypadkach – znaczące uproszczenia postaci macierzy fundamentalnej. W konsekwencji wyniki te prowadzą do klasyfikacji grup kwantowych, które można uzyskać za pomocą konstrukcji Woronowicza dla $n = 3$ zastosowanej do funkcji E, która przyjmuje niezerowe wartości tylko (dokładnie) na permutacjach – jest to najważniejszy wynik z pracy [H2].

TWIERDZENIE 3.7 ([H2, Theorem 2.3]). *Niech $\zeta := e^{\frac{2}{3}\mathrm{i}\pi}$. Dowolna grupa kwantowa otrzymana w wyniku konstrukcji Woronowicza dla wymiaru 3, zastosowanej do funkcji E spełniającej warunek permutacji* (P)*, jest izomorficzna z jedną z następujących grup kwantowych:*

1. T^2 *(przemienny torus),*

2. $U_q(2)$ *dla* $q \in \mathbb{C}^*$,

3. $SU_{q,m}(3)$ *dla* $q \in \mathbb{C}^*$ *i* $m \in \{0,1,2\}$, *która powstaje przez konstrukcję Woronowicza dla stałych*

$$E_{123} = 1,\ E_{132} = q,\ E_{213} = q\zeta^{-m},\ E_{231} = |q|^2\zeta^m,\ E_{312} = |q|^2\zeta^{-m},\ E_{321} = |q|^2 q\zeta^m,$$

4. $A_{q,k,m}(3)$ *dla* $q \in \mathbb{C}^*$ *i* $k,m \in \{0,1,2\}$, *która powstaje przez konstrukcję Woronowicza dla stałych*

$$E_{123} = 1,\ E_{132} = q,\ E_{213} = q\zeta^k,\ E_{231} = \zeta^m,\ E_{312} = \zeta^{-m},\ E_{321} = q\zeta^{-k}.$$

Grupa $U_q(2)$ była już znana: dla $q \in (0,1)$ została zdefiniowana w pracy H.T. Koelinka [Koe91], a przypadek ogólny $q \in \mathbb{C}^*$ badali X.X. Zhang i E.Y. Zhao w [ZZ05, Zh06].

Grupa $SU_{q,m}(3)$ jest uogólnieniem kwantowej grupy $SU_q(3)$ z Przykładu 3.4 do zespolonego (niezerowego) parametru deformacji q (dokładniej: $SU_q(3) = SU_{-q,0}(3)$ dla $q \in (0,1)$). Łatwo sprawdzić, że dla $q \neq 1$ $SU_{q,m}(3)$ nie pochodzi od żadnej grupy klasycznej (ponieważ zawiera jako podgrupę $U_{-q}(2)$) oraz że $SU_{q,m}(3)$ jest typu Kaca wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| = 1$. Warto też wspomnieć, że $SU_{q,m}(3)$, jako algebra Hopfa, jest izomorficzna z multi-parametryczną grupą kwantową $SU_{-|q|,P_{\gamma,m}}$, opisaną przez T. Hayashi [Hay92, Proposition 6.4].

Zupełnie nowa w powyższej klasyfikacji jest rodzina grup kwantowych $A_{q,k,m}(3)$. Są one zawszee typu Kaca. W zależności od tego, czy $k+m \notin 3\mathbb{N}$ czy nie, ich zachowanie będzie nieco inne. Jeśli $k+m \notin 3\mathbb{N}$, to grupa kwantowa $A_{q,k,m}(3)$ jest podgrupą kwantowej grupy refleksji $H_3^{\infty+}$. W tym też przypadku nieprzywiedlne $*$-reprezentacje algebry są nierozerwalnie związane z reprezentacjami (nieprzemiennego o ile $k \neq m$) torusa lub – inaczej mówiąc – reprezentacjami algebry (wymiernych) rotacji A_θ. Przypomnę, że A_θ jest uniwersalną C*-algebrą z jedynką generowaną przez dwa elementy unitarne v_1 i v_2 spełniające relację $v_1v_2 = e^{2i\pi\theta}v_2v_1$ (patrz [AP89], [1]).

TWIERDZENIE 3.8 ([H2, Proposition 6.11]). *Istnieją trzy rodziny nieprzywiedlnych $*$-reprezentacji algebry* $\mathsf{A} = C(A_{q,k,m}(3))$ *dla* $k+m \notin 3\mathbb{N}$:

1. *reprezentacje jednowymiarowe:* $\pi(u_{11}) = z_1$, $\pi(u_{22}) = z_2$, $\pi(u_{33}) = \bar{z}_1\bar{z}_2$ *i* $\pi(u_{ij}) = 0$ *dla* $i \neq j$, *gdzie* $|z_1| = |z_2| = 1$.

2. *reprezentacje zdefiniowane jako*

$$\pi(u_{12}) = \pi_\theta(v_1), \quad \pi(u_{23}) = \pi_\theta(v_2), \quad \pi(u_{31}) = \zeta^{-m}\pi_\theta(v_2^*v_1^*)$$

i $\pi(u_{ij}) = 0$ *w przeciwnym przypadku, gdzie* π_θ *jest nieprzywiedlną $*$-reprezentacją (wymiernej) algebry rotacji* A_θ *z generatorami* v_1 *i* v_2 *oraz* $\theta = \frac{k-m}{3}$.

3. *reprezentacje zdefiniowane jako*

$$\pi(u_{13}) = \pi_{\theta'}(w_1), \quad \pi(u_{21}) = \pi_{\theta'}(w_2), \quad \pi(u_{32}) = \zeta^m\pi_{\theta'}(w_2^*w_1^*)$$

i $\pi(u_{ij}) = 0$ *w przeciwnym przypadku, gdzie* $\pi_{\theta'}$ *jest nieprzywiedlną $*$-reprezentacją (wymiernej) algebry* $A_{\theta'}$ *z generatorami* w_1 *i* w_2 *oraz* $\theta' = \frac{m-k}{3}$.

W przypadku, gdy $k+m \in 3\mathbb{N}$, także można pokazać, że istnieją $*$-reprezentacje algebry $A_{q,-m,m}(3)$ związane z torusem nieprzemiennym.

TWIERDZENIE 3.9 ([H2, Proposition 6.14]). *Niech σ będzie jedną z permutacji $\sigma_a = (231)$ lub $\sigma_b = (312)$ oraz niech V_1 i V_2 będą operatorami unitarnymi na przestrzeni Hilberta spełniającymi relację*

$$V_1 V_2 = c(\sigma) V_2 V_1,$$

gdzie $c(\sigma_a) = \zeta^{-m}$, $c(\sigma_b) = \zeta^m$. Wówczas π zdefiniowane jako

$$\pi(u_{1\sigma(1)}) = V_1, \quad \pi(u_{2\sigma(2)}) = V_2, \quad \pi(u_{3\sigma(3)}) = \overline{c(\sigma)} V_2^* V_1^*, \quad \pi(u_{ij}) = 0 \text{ w przeciwnym przypadku,}$$

jest $*$-reprezentacją algebry $A_{q,-m,m}(3)$.

Wśród rodziny $A_{q,k,m}(3)$ są także obiekty pochodzące od grup klasycznych, na przykład $A_{q,-m,m}(3)$ dla $m \neq 0$ ([H2, Remark 6.12]) oraz $A_{q,0,0}(3)$ dla $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ ([H2, Proposition 6.15]). Pokazałam jednak, że jest także dużo grup nietrywialnych: dla $k+m \notin 3\mathbb{N}$ i $k \neq m$; dla $m \neq 0$ i $k = 3-m$ oraz dla $k = m = 0$ i $|q| = 1$, $q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Niektóre grupy kwantowe należące do powyższych rodzin są izomorficzne. W szczególności łatwo sprawdzić, korzystając z Lematu 5.1 w [H2], że dla $q \in \mathbb{C}^*$ i $k, m \in \{0,1,2\}$ mamy

$$SU_{q,m}(3) \cong SU_{\frac{1}{q}\zeta^m, m}(3).$$

oraz

$$A_{q,k,m}(3) \cong A_{q\zeta^{m-k},k,m}(3) \cong A_{\frac{1}{q},3-k,3-m}(3) \cong A_{\frac{1}{q}\zeta^{m-k},3-m,3-k}(3).$$

Podsumowując ten rozdział, chciałabym zauważyć, że moje badania konstrukcji Woronowicza pozwoliły nie tylko zdefiniować nowe grupy kwantowe, w tym $SU_q(3)$ z *zespolonym* parametrem deformacji q, ale przede wszystkim zrozumieć, że pomimo wrażenia ogólności konstrukcja ta nakłada dość silne więzy na budowaną grupę kwantową.

3.4 Geometryczne własności nieprzemiennych procesów Lévy'ego na grupach kwantowych

Niech (A, Δ, ε) będzie $*$-bialgebrą z komnożeniem Δ i kojedynką ε.

DEFINICJA 3.10. Rodzinę $*$-homomorfizmów zachowujących jedynkę $(j_{st})_{0 \leq s \leq t}$, zdefiniowanych na $*$-bialgebrze A i o wartościach w nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej $(\mathcal{B}, \Phi)$ ($*$-algebra z jedynką $1_{\mathcal{B}}$ i ustalonym stanem) nazywamy *procesem Lévy'ego na A* (względem Φ), jeśli spełnione są następujące warunki:

(*i*) (własność składania przyrostów) $m_{\mathcal{B}} \circ (j_{st} \otimes j_{tu}) \circ \Delta = j_{su}$ dla dowolnych $0 \leq s \leq t \leq u$, gdzie $m_{\mathcal{B}}$ oznacza mnożenie w $\mathcal{B}$;

(*ii*) (niezależność przyrostów) obrazy odpowiadające rozłącznym przedziałom komutują, tj. $[j_{st}(A), j_{s't'}(A)] = \{0\}$ dla $0 \leq s \leq t \leq s' \leq t'$, a wartości oczekiwane odpowiadające rozłącznym przedziałom faktoryzują się, tj.

$$\Phi(j_{s_1t_1}(a_1) \cdots j_{s_nt_n}(a_n)) = \Phi(j_{s_1t_1}(a_1)) \cdots \Phi(j_{s_nt_n}(a_n)),$$

dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in A$ i $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$;

(*iii*) (stacjonarność przyrostów) funkcjonały $\varphi_{st} := \Phi \circ j_{st} : A \to \mathbb{C}$ zależą tylko od różnicy $t - s$;

(*iv*) (słaba ciągłość) $\lim_{t \searrow s} j_{st}(a) = j_{ss}(a) = \varepsilon(a)1_{\mathcal{B}}$ (według rozkładu) dla dowolnego $a \in \mathsf{A}$.

W analogii do sytuacji klasycznej, z każdym procesem Lévy'ego $(j_{st})_{0 \le s \le t}$ związanych jest kilka obiektów; z dokładnością do pewnych utożsamień są to odpowiedniości jednoznaczne (więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w [Sch93]). Po pierwsze, funkcjonały $\varphi_t := \varphi_{0,t} = \varphi_{s,t+s}$, $t \ge 0$, tworzą słabo ciągłą półgrupę splotową stanów na A. Dla takiej półgrupy istnieje tzw. *funkcjonał generujący* $\psi : A \to \mathbb{C}$, związany z $(\varphi_t)_{t \ge 0}$ wzorem

$$\varphi_t = \exp_\star t\psi = \varepsilon + t\psi + \frac{t^2}{2}\psi \star \psi + \cdots + \frac{t^n}{n!}\psi^{\star n} + \cdots .$$

Przypomnę, że ε oznacza tutaj kojedynkę algebry A. Ponadto $\psi \star \phi = (\psi \otimes \phi) \circ \Delta$.

Definicja 3.11. Odwzorowanie liniowe $\psi : A \to \mathbb{C}$ nazywamy *funkcjonałem generującym*, jeśli jest

- znormalizowane, czyli $\psi(1) = 0$;
- hermitowskie, czyli $\psi(a^*) = \overline{\psi(a)}$ for all $a \in A$;
- warunkowo dodatnio określone, czyli $\psi(a^*a) \ge 0$ dla $a \in \ker \varepsilon$.

Odwrotnie, poprzez odpowiedniość Schönberga, z funkcjonałem generującym można skojarzyć półgrupę splotową stanów, a następnie ([Sch93, Section 1.9]) odzyskać proces Lévy'ego.

Dla procesu Lévy'ego $(j_{st})_{0 \le s \le t}$ i związanego z nim funkcjonału generującego ψ możemy także utworzyć operator liniowy (tzw. *operator splotowy*) $T_\psi : A \to A$, zdefiniowany jako $T_\psi = (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta$, oraz półgrupę operatorów (tzw. *półgrupę Markowa na A*) $T_t : A \to A$,

$$T_t = (\mathrm{id} \otimes \varphi_t) \circ \Delta, \quad t \ge 0. \tag{9}$$

Bardzo ważnym w moich badaniach obiektem związnym z danym procesem Lévy'ego jest tzw. trójka Schürmanna. W ogólności może ona być zdefiniowana na dowolnej $*$-algebrze z wyróżnionym $*$-charakterem[3].

Definicja 3.12. *Trójką Schürmanna* na (A, ε) nazywamy trójkę (ρ, η, ψ) złożoną z:

- $*$-reprezentacji zachowującej jedynkę $\rho : A \to L(H)$ działającej na pewnej przestrzeni unitarnej H;
- ρ-ε-kocyklu η, czyli odwzorowania liniowego $\eta : A \to H$ spełniającego

$$\eta(ab) = \rho(a)\eta(b) + \eta(a)\varepsilon(b), \quad a, b \in A, \tag{10}$$

- funkcjonału liniowego $\psi : A \to H$ spełniającego warunek

$$\psi(ab) = \psi(a)\varepsilon(b) + \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle + \varepsilon(a)\psi(b), \quad a, b \in A. \tag{11}$$

[3] Tzn. funkcjonałem $\varepsilon : A \to \mathbb{C}$ spełniającym warunki $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$, $\varepsilon(1_A) = 1$ i $\varepsilon(a^*) = \overline{\varepsilon(a)}$ dla $a, b \in A$.

Mając dany funkcjonał generujący ψ zawsze możemy (poprzez konstrukcję typu GNS, [Sch93]) utworzyć trójkę Schürmanna (ρ, η, ψ); będzie ona jednoznacznie wyznaczona o ile założymy, że $\eta(A)$ jest totalny w H. Z kolei każdy funkcjonał ψ z trójki Schürmann prowadzi do funkcjonału generujacego (przez operację 'hermicjanizacji': $\psi \mapsto \psi + \overline{\psi}$, gdzie $\overline{\psi}(a) = \overline{\psi(a^*)}$).

Dla lepszego zobrazowania, czym są funkcjonał generujący i trójka Schürmanna danego procesu, przytoczę teraz dwa przykłady – jeden pochodzący od klasycznego procesu Wienera (ruchu Browna), a drugi związany z nieprzemiennym analogiem procesu Poissona. Dokładniejsze opisy obu przykładów można znaleźć np. w [2] (Example 2.5 i Proposition 2.8).

Przykład 3.13. Niech $(X_t)_{t\geq 0}$ będzie (klasycznym) ruchem Browna z dryfem na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, o wartościach w $\mathbb{R}$, tzn. dla pewnych parametrów $d, \sigma \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = e^{t(idu - \frac{\sigma^2}{2}u^2)}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Niech teraz $A = \mathbb{C}[x]$ będzie uniwersalną $*$-algebrą z jedynką generowaną przez jeden, symetryczny element $x = x^*$ i zadajmy na A sturukturę $*$-bialgebry poprzez liniowe i multiplikatywne rozszerzenie wzorów $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$ (zatem $\varepsilon(p) = p(0)$ dla $p \in \mathbb{C}[x]$). Ponadto niech $\mathcal{B} = Pol(X)$ będzie algebrą generowaną przez $\{X_t, t \geq 0\}$ z wartością oczekiwaną jako stanem $\Phi = \mathbb{E}$. Wówczas process klasyczny $(X_t)_{t\geq 0}$ definiuje proces nieprzemienny $(j_{st})_{0\leq s\leq t}$ na $A = \mathbb{C}[x]$ o wartościach w $\mathcal{B} = Pol(X)$, wzorem

$$j_{st}(x^k) = (X_t - X_s)^k, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Funkcjonał generujący związany z tym procesem jest postaci

$$\psi(p) = dp'(0) + \frac{\sigma^2}{2}p''(0) \text{ dla } p \in \mathbb{C}[x].$$

Pozostałe dwa elementy z trójki Schürmanna będą wtedy następującej postaci (łatwo sprawdzić, że spełnione będą warunki (10) i (11)): reprezentacja ρ będzie działać na przestrzeni $H = \mathbb{C}$ wzorem

$$\rho(p)(\lambda) = p(0)\lambda, \quad p \in \mathbb{C}[x],$$

a kocykl $\eta : A \to H$ będzie dany wzorem

$$\eta(p) = \sigma p'(0), \quad p \in \mathbb{C}[x].$$

□

Przykład 3.14. Niech A będzie $*$-bialgebrą, φ będzie stanem na A, a $\lambda > 0$ będzie stałą rzeczywistą. Wówczas $\psi(a) := \lambda[\varphi(a) - \varepsilon(a)]$, $a \in A$, spełnia warunki definicji 3.11, czyli jest funkcjonałem generującym jakiegoś procesu Lévy'ego na A. Proces ten nazywamy (nieprzemiennym) *złożonym procesem Poissona*, a ψ – generatorem *typu Poissona*. Trójkę Schürmanna związaną z tym procesem utworzą:

- $H = L^2(A, \varphi)$ jest przestrzenią Hilberta powstałą z konstrukcji GNS, a ρ jest reprezentacją (lewą) regularną: $\rho(a)[b] = [ab]$, $a \in A$, $[b] \in L^2(A, \varphi)$;

- $\xi \in L^2(A, \varphi)$ jest wektorem cyklicznym w $L^2(A, \varphi)$, a kocykl $\eta : A \to H$ definiujemy jako $\eta(a) = [\varphi(a) - \varepsilon(a)]\xi$.

Mamy wówczas $\psi(a) = \langle \xi, (\rho - \varepsilon)(a)\xi \rangle_H$, $a \in A$. Odwrotnie, każdy funkcjonał generujący takiej postaci (dla pewnej $*$-reprezentacji ρ i pewnego wektora $\xi \in H$) jest generatorem typu Poissona.$\square$

Podsumowując ten wstęp, możemy narysować następujący schemat obiektów związanych z procesami Lévy'ego.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{\begin{array}{c}\text{proces Lévy'ego}\\ (j_{st})_{0 \le s \le t}\end{array}} & \leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c}\text{półgrupa}\\ \text{stanów } (\varphi_t)_{t \ge 0}\end{array}} & \leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c}\text{funkcjonał generujący}\\ \psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}\end{array}} & \leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c}\text{trójka Schürmanna}\\ (\pi, \eta, L)\end{array}} \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
 & & \boxed{\begin{array}{c}\text{półgrupa}\\ \text{Markova } (T_t)_{t \ge 0}\end{array}} & \leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c}\text{operator splotowy}\\ T_\psi : A \to A\end{array}} & &
\end{array}$$

Jak wyjaśniłam w Podrozdziale 3.3, każda zwarta grupa kwantowa $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ zawiera w sobie gęstą $*$-bialgebrę $A = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$. Poprzez *proces Lévy'ego na* $\mathbb{G}$ rozumiemy proces Lévy'ego na $*$-bialgebrze $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ w sensie Definicji 3.10. Związane z procesem Lévy'ego na $\mathbb{G}$ półgrupa stanów, półgrupa Markowa czy funkcjonał generujący będą zdefiniowane *a priori* na gęstym podzbiorze $C(\mathbb{G})$. Dotyczy to także elementów trójki Schürmanna, ale dla wygody będziemy pisali *trójka Schürmanna na* $\mathbb{G}$ dla oznaczenia trójki Schürmanna na $(\mathrm{Pol}(\mathbb{G}), \varepsilon)$ w sensie Definicji 3.12. W tym miejscu warto wspomnieć, że gdy $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), u)$ jest zwartą macierzową grupą kwantową, to bez straty ogólności możemy założyć, że reprezentacja ρ przyjmuje wartości w $B(H)$, algebrze operatorów liniowych i ciągłych na przestrzeni Hilberta H. Co więcej, elementy trójki Schürmanna będą wówczas jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości na generatorach u_{jk} $(j, k = 1, \ldots, n)$, czyli współczynnikach macierzy u. Wartości na jedynce algebry 1 będą zawsze następujące: $\rho(1) = I$, $\eta(1) = 0$ i $\psi(1) = 0$.

Badanie procesów Lévy'ego na grupach kwantowych stanowi główny cel obszernej (56-stronicowej) pracy [H3], powstałej we współpracy z F. Ciprianim i U. Franzem. Poniżej opisuję cztery najważniejsze tematy poruszane w pracy.

Pierwszym tematem podjętym w pracy [H3] był związek pomiędzy procesami Lévy'ego na $A = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ i *kwantowymi półgrupami Markowa* na C*-algebrze $C(\mathbb{G})$. Pod tym ostatnim pojęciem kryje się silnie ciągła półgrupa operatorów na A, będących całkowicie dodatnimi kontrakcjami, zachowującymi jedynkę. Udowodniliśmy, że półgrupa Markowa $(T_t)_{t \ge 0}$ na A (dana wzorem (9)) ma jednoznaczne rozszerzenie do kwantowej półgrupy Markowa na zredukowanej C*-algebrze [H3, Theorem 3.2]. (Istnieje także takie rozszerzenie na pełną C*-algebrę.) Ponadto wykazaliśmy, że charakteryzacja procesów Lévy'ego na grupach topologicznych jako tych procesów Markova, które są niezmiennicze na translacje w czasie i w przestrzeni, pozostaje w mocy w kontekście zwartych grup kwantowych.

Twierdzenie 3.15 ([H3, Theorem 3.4]). *Niech* $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ *będzie zwartą grupa kwantową i niech* $(T_t)_{t \ge 0}$ *będzie kwantową półgrupą Markowa na* $C(\mathbb{G})$. *Wtedy* $(T_t)_{t \ge 0}$ *pochodzi od (wyznaczonego jednoznacznie) procesu Lévy'ego na* $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* T_t *jest niezmienniczy na translacje względem komnożenia dla* $t \ge 0$, *tzn.*

$$\Delta \circ T_t = (\mathrm{id} \otimes T_t) \circ \Delta.$$

Drugim tematem podjętym w pracy [H3] było badanie dwóch rodzajów symetrii kwantowych półgrup Markowa związanych z procesami Lévy'ego, a jednym z efektów było znalezienie ładnej ich charakteryzacji w języku własności funkcjonałów generujących. Rozważane symetrie to *quantum detailed balance* oraz *symetria KMS*, badane już wcześniej w kontekście C*-algebr i algebr von Neumanna ([?], [BR97], [FU07] to tylko kilka wybranych pozycji). W naszej sytuacji, pochodzą one od dwóch zanurzeń $A = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ w przestrzeń $L^2(A,h)$.

Niech $L^2(A,h)$ oznacza przestrzeń Hilberta pochodzacą z konstrukcji GNS dla stanu Haara h i niech ξ_h oznacza wektor cykliczny, zatem $h(a) = \langle \xi_h, a\xi_h\rangle_{L^2}$. Niech $i : A \mapsto L^2(A,h)$ będzie zanurzeniem (injektywnym homomorfizmem) A w $L^2(A,h)$. Powiemy, że operator $T : A \to A$ jest *i-symetryczny*, jeśli

$$\big\langle i(a), i(Tb)\big\rangle_{L^2} = \big\langle i(Ta), i(b)\big\rangle_{L^2}, \quad a, b \in A.$$

Jeśli będziemy rozpatrywać *naturalne zanurzenie*

$$i_h : A \ni a \to a\xi_h \in L^2(A,h), \tag{12}$$

to i_h-symetria operatorów T_t, $t \geq 0$, oznacza dokładnie, że półgrupa Markova $(T_t)_{t\geq 0}$ spełnia warunek *quantum detailed balance*, tj.

$$h\big(aT_t(b)\big) = h\big(T_t(a)b\big) \quad \text{dla} \quad a, b \in A,\ t \geq 0. \tag{13}$$

Z drugiej strony, jeśli rozwyżamy *zanurzenie symetryczne*

$$i_s : \mathsf{A} \ni a \mapsto i_s(a) = \sigma_{-\frac{i}{4}}(a)\xi_h \in L^2(A,h), \tag{14}$$

gdzie $(\sigma_t)_{t\in R}$ jest grupą automorfizmów modularnych (strona 5), to i_s-symetria operatorów T_t oznacza symetrię KMS półgrupy $(T_t)_{t\geq 0}$, czyli

$$h\big(aT_t(b)\big) = h\big(\sigma_{\frac{i}{2}}(b)T_t(\sigma_{-\frac{i}{2}}(a))\big) \quad \text{dla} \quad a, b \in A,\ t \geq 0. \tag{15}$$

Okazuje się, że oba warunki mogą być wygodnie scharakteryzowane poprzez pewne niezmienniczości funkcjonału generującego.

TWIERDZENIE 3.16 ([H3, Theorem 4.11]). *Niech $(T_t)_{t\geq 0}$ będzie półgrupą Markowa procesu Lévy'ego na A z funkcjonałem generującym ψ.*

(a) $(T_t)_{t\geq 0}$ *spełnia warunek* quantum detailed balance (13) *wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \circ S = \psi$ (powiemy wtedy, że ψ jest* GNS-symetryczny*).*

(b) $(T_t)_{t\geq 0}$ *jest KMS-symetryczna* (15) *wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi \circ R = \psi$ (powiemy wtedy, że ψ jest* KMS-symetryczny*).*

Unitarna koodwrotność R, pojawiająca się w powyższym twierdzeniu, posiada dużo lepsze własności niż zwykła koodwrotność S: zachowuje dodatniość, jest hermitowska i idempotentna ($R^2 = 1$). Dzieki temu zachowuje także funkcjonały generujące – możemy zatem przekształcić dowolny funkcjonał generujacy ψ do funkcjonału $\psi + \psi \circ R$, który ponadto jest KMS-symetryczny [H3, Proposition 5.1]. W [H3, Theroem 5.4] przedstawiliśmy przekształcenie trójki Schürmanna odpowiadające transformacji $\psi \to \psi + \psi \circ R$. W szczególności pokazaliśmy, że jeśli η jest kocyklem dla ψ, to funkcjonałowi $\psi \circ R$ odpowiada kocykl postaci $\bar{\eta}(a) = \iota[\eta(R(a^*))]$, gdzie $\iota : H \to \bar{H}$ jest kanonicznym izomorfizmem na przestrzeń sprzężoną $\bar{H}$. Wynik ten wykorzystaliśmy później do uproszczenia warunku na własność Haagerupa dyskretnych grup kwantowych (patrz strona 25).

Trzeci ważny temat opisany w [H3] to charakteryzacja półgrup Markova niezmienniczych względem sprzężenia (ad-*niezmienniczych*). Odwzorowanie $T : A \to A$ nazywamy ad-*niezmienniczym*, jeśli

$$(\mathrm{id} \otimes T) \circ \mathrm{ad} = \mathrm{ad} \circ T,$$

gdzie $\mathrm{ad} : A \to A \otimes A$, $\mathrm{ad}(a) = a_{(1)}S(a_{(3)}) \otimes a_{(2)}$ (korzystam z notacji Sweedlera). W [H3, Corollary 6.8] pokazaliśmy, że półgrupa Markova $(T_t)_t$ jest ad-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający jej funkcjonał generujący ψ spełnia warunek

$$(\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \mathrm{ad} = \psi 1_A. \tag{16}$$

Funkcjonały ad-niemiennicze, czyli spełniające warunek (16), mogą być scharakteryzowane jako elementy centrum przestrzeni dualnej A', patrz [H3, Proposition 6.2], co potwierdza intuicję, że są to analogony miar centralnych na klasycznych grupach Liego. Zauważyliśmy też, że funkcjonał jest ad-niezmienniczy wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi = (\psi \otimes h) \circ \mathrm{ad}$ [H3, Proposition 6.7(c)]. Co więcej, odwzorowanie

$$\mathrm{ad}^* : A' \ni \psi \mapsto (\psi \otimes h) \circ \mathrm{ad} \in A'$$

jest surjekcją na przestrzeń przestrzeń funkcji ad-niezmienniczych [H3, Proposition 6.6 i 6.7(c)]. Niestety, nie musi ono zachowywać funkcjonałów generujących. Sytuacja jest lepsza, gdy $\mathbb{G}$ jest typu Kaca (czyli gdy stan Haara jest śladem) – wówczas ad^* staje się czymś w rodzaju warunkowej wartości oczekiwanej (zachowuje dodatniość, jest idempotentem). Obserwacja ta połączona z wynikiem M. Brannana [Bra12, Corollary 4.3], pozwoliła znaleźć kompletną klasyfikację ad-niezmienniczych funkcjonałów generujących procesów Lévy'ego na wolnej grupie ortogonalnej O_n^+
.

Twierdzenie 3.17 ([H3, Theorem 10.2]). *Ad-niezmiennicze funkcjonały generujące na* $\mathrm{Pol}(O_n^+)$ *są postaci*

$$\hat{L} = L \circ (\mathrm{id} \otimes h) \circ \mathrm{ad}$$

z L *zdefiniowanym na* $\mathrm{Pol}(O_n^+)_0 \cong \mathrm{Pol}([-n,n])$ *jako*

$$Lf = -bf'(n) + \int_{-n}^{n} \frac{f(x) - f(n)}{n - x} \mathrm{d}\nu(x)$$

dla pewnej liczby rzeczywistej $b \geq 0$ *i pewnej skończonej miary* ν *na* $[-n,n]$ *z* $\nu(\{n\}) = 0$.

Ostatni z ważnych tematów pracy [H3], o którym chciałabym wspomnieć, to konstrukcja półgrupy Markova, która koduje geometryczne własności grupy kwantowej, na której żyje. Wiadomo było (na przykład z wykładów F. Ciprianiego [Cip08]), że skutecznym sposobem połączenia grup kwantowych z geometrią może być teoria potencjału (czyli formy Dirichleta na algebrach C∗- i von Neumanna). W naszej pracy, z F. Ciprianim i U. Franzem, wychodząc od GNS-symetrycznego procesu Lévy'ego (i funkcjonału generującego) skonstruowaliśmy ciąg obiektów prowadzący (przy dodatkowych założeniach) do operatora Diraca i trójki spektralnej. Obiekty te pozwoliły na włączenie do badań grup kwantowych szerokiego zakresu metod nieprzemiennej geometrii, stworzonej przez A. Connes'a [Con94].

Zaczęliśmy od wyznaczenia *explicite* struktury form Dirichleta związanej z KMS-symetrycznymi funkcjonałami generującymi na ustalonej grupie kwantowej.

TWIERDZENIE 3.18 ([H3, Theorem 7.1]). *Niech ψ będzie KMS-symetrycznym funkcjonałem generującym procesu Lévy'ego na A (czyli $\psi \circ R = \psi$), i niech $T_\psi = (\mathrm{id} \otimes \psi) \circ \Delta$ on A. Wówczas forma kwadratowa $\mathcal{E}_\psi$ zdefiniowana jako*

$$\mathcal{E}_\psi[i_h(a)] = \big\langle i_s(a), i_s(-T_\psi(a))\big\rangle_{L^2(\mathsf{A},h)} = -h\big(a^*(\sigma_{-\frac{i}{4}} \circ T_\psi \circ \sigma_{\frac{i}{4}})(b)\big)$$

na dziedzinie

$$D(\mathcal{E}_\psi) = \{i_s(a) \in L^2(\mathsf{A}, h) : a \in D(T_\psi) \text{ and } \mathcal{E}_\psi[i_s(a)] < \infty\}$$

jest domykalna i jej domknięcie jest formą Dirichleta.

W powyższym twierdzeniu, i_h oraz i_s są naturalnym i, odpowiednio, symetrycznym zanurzeniem A w $L^2(\mathsf{A}, h)$, patrz (12) i (14).

W przypadku, gdy ψ jest GNS-symetryczny (czyli $\psi \circ S = \psi$), dostajemy $\mathcal{E}_\psi[i_h(a)] = -h\big(a^* T_\psi(a)\big)$, bo T_ψ komutuje z analitycznym rozszerzeniem grupy automorfizmów modularnych $(\sigma_z)_{z\in\mathbb{C}}$. W [H3, Corollary 7.4] zauważyliśmy, że związana z takim funkcjonałem forma półtoraliniowa $\tilde{\mathcal{E}}_\psi$ na A, zdefiniowana wzorem $\tilde{\mathcal{E}}(a, b) = -h(a^* T_\psi(b))$ dla $a, b \in A$, może byc scharakteryzowana warunkiem

$$\tilde{\mathcal{E}}_\psi(a, b)\mathbf{1} = (m_* \otimes \tilde{\mathcal{E}}_\psi)(\Delta(a), \Delta(b)), \quad a, b \in \mathcal{A},$$

gdzie $m_*(a, b) = a^* b$.

Następnie pokazaliśmy, że z formą Dirichleta $\mathcal{E}_\psi$ można skojarzyć operator różniczkowania ∂, który umożliwia zadanie rachunku różniczkowego na C*-algebrze $\mathrm{C}(\mathbb{G})$. Co więcej, forma Dirichleta jest wówczas dana jako uogólniona całka Dirichleta

$$\mathcal{E}_\psi[i_h(a)] = \frac{1}{2}\|\partial a\|^2, \quad a \in A.$$

Korzystając z tego różniczkowania, zdefiniowaliśmy w [H3, Proposition 8.3] operator Diraca D, zasadniczo postaci

$$D := \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial^* & 0 \end{pmatrix},$$

którego widmo (spektrum) jest wyznaczone przez widmo formy $\mathcal{E}_\psi$. Pokazaliśmy także w [H3, Theorem 8.4], że operator Diraca D stanowi część pewnej trójki spektralnej (być może z nietrywialnym jąderem) kernel-degenerate), względem której elementy algebry $A = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ są lipschitzowskie.

Nasz konstrukcja w istotny sposób wykorzystuje elementy trójki Schürmanna związanej z generatorem procesu (opisanie tutaj szczegółów wymagało by wprowadzenia dużej ilości notacji). Warto też wspomnieć, że założenie o GNS-symetrii gwarantuje odpowiednie własności domykalności różniczkowania, niezbędne do wykazania, że D jest samosprzężony i że widmo *laplasjanu Diraca* D^2 z dokładnością do zera pokrywa się z widmem generatora T_ψ (widzianym jako operator na $L^2(A, h)$).

W pracy [H3] opisaliśmy też dwa przykłady funkcjonałów, które prowadzą do trójek spektralnych.

Przykład 3.19 ([H3, Section 11.2]). Niech $\mathbb{G} = SU_q(2)$, $q \in (0,1)$ i niech α i γ oznaczają standardowe generatory $C(SU_q(2))$, patrz Przykład 3.4. Rozważmy $*$-reprezentację $\rho : C(SU_q(2)) \to \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ zadaną na generatorach:

$$\begin{aligned}\pi(\alpha)e_{k,n} &= \sqrt{1-q^{2k}}e_{k-1,n}\ (k \geq 1), \quad \pi(\alpha)e_{0,n} = 0,\\ \pi(\gamma)e_{k,n} &= q^k e_{k,n-1},\end{aligned}$$

gdzie $\{e_{k,n}; k \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$ jest standardową bazą ortonormalną $\ell^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$. Dla ustalonego $0 < \lambda < 1$ definiujemy wektor $v_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k e_{k,0}$ i generator typu Poissona (patrz Przykład 3.14)

$$\phi_\lambda(a) = \langle v_\lambda, (\pi - \varepsilon)(a)v_\lambda\rangle.$$

Związany z nim kocykl $\eta_\lambda(a) = (\pi - \varepsilon)(a)v_\lambda$ jest jednoznacznie zdefiniowany przez wartość, jaką przyjmuje na α^* (patrz [SS98, Lemma 3.2]). Wykazaliśmy, że gdy $\lambda \to 1^-$, to $\eta_\lambda(\alpha^*)$ dąży do pewnego wektora $v_\infty \in \ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, $v_\infty = \lim_{\lambda\to 1^-} \eta_\lambda(\alpha^*)$. Wektora tego używamy następnie do zdefiniowania 'granicznego' kocyklu η_∞, czyli kładziemy $\eta_\infty(a) = (\pi - \varepsilon)(a)v_\infty$. Wówczas można pokazać, że

$$\psi_\infty(ab) = \langle \eta_\infty(a^*), \eta_\infty(b)\rangle, \quad a, b \in \ker \varepsilon$$

jest poprawnie zdefiniowanym funkcjonałem generującym. Jest on ponadto GNS-symetryczny [H3, Proposition 11.3] i nieograniczony [H3, Proposition 11.4]. W świetle Twierdzenia 8.4 z [H3] definiuje on trójkę spektralną na $\mathrm{Pol}(SU_q(2))$.$\square$

Przykład 3.20 ([H3, Remark 10.4]). Niech $\mathbb{G} = O_n^+$ i niech $(u^{(s)})_{s\in\mathbb{N}}$ oznacza rodzinę nierównoważnych unitarnych nieprzywiedlnych reprezentacji O_n^+. Niech ponadto $(U_s)_{s\in\mathbb{N}}$ oznacza rodzinę wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju ($U_0(x) = 1$, $U_1(x) = x$, $U_k(x) = xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x)$). Adniezmienniczy funkcjonał ψ opisany w Twierdzeniu 10.2 z [H3], związany ze stałą $b = 1$ i miarą $\nu = 0$, działa na współczynnikach nieprzywiedlnych reprezentacji O_n^+ jako

$$\psi\big(u_{jk}^{(s)}\big) = -\delta_{jk}\frac{U_s'(n)}{U_s(n)}, s \in \mathbb{N}.$$

Jako funkcjonał działający diagonalnie na macierzach $u^{(s)}$, ψ jest także GNS-symetryczny [H3, Remark 4.7]. Operator splotowy T_ψ, indukowany przez ψ i widziany jako operator na $L^2(A,h)$, ma wartości własne $\lambda_s = -\frac{U_s'(n)}{U_s(n)}$ o krotności $m_s = \big(U_s(n)\big)^2$, $s \in \mathbb{N}$. Wartości te są dyskretne i nieograniczone (rosną jak s^2), więc ψ – zgodnie z Twierdzeniem 8.4 z [H3] – definiuje trójkę spektralną na $\mathrm{Pol}(O_n^+)$.

Możemy policzyć *wymiar spektralny* takiej trójki spektralnej (czyli infimum po $d > 0$ takich, że $\sum_s m_s(-\lambda_s)^{-d/2} < +\infty$). Dostajemy wówczas $d = 3$ dla $n = 2$ oraz $d = +\infty$ dla $n \geq 3$. Wynik dla przypadku $n = 2$ zgadza się z faktem, że $O_2^+ \cong SU_{-1}(2)$, a grupa $SU_{-1}(2)$ ma realizację jako algebra funkcji na trójwymiarowej grupie Liego $SU(2)$ (patrz [Zak91]).$\square$

Kontynuacją naszych badań nad symetriami procesów Lévy'ego była praca [H5], wspólna z U. Franzem i A. Skalskim, która zawiera obszerne wprowadzenie do tematyki procesów Lévy'ego na grupach kwantowych i związanych z nią problemów badawczych (część przeglądowa) oraz rozwiązania tych problemów w przypadku grupy S_n^+ (część oryginalna). Na razie opiszę wyniki dotyczące własności symetrii i ad-niezmienniczości dla przypadku grupy S_n^+. Warto sobie uświadomić, że na S_n^+ nie rozróżniamy już między GNS- a KMS-symetrią, ponieważ (jak wspomniałam w Przykładzie 3.2) S_n^+ jest typu Kaca, więc $S = R$.

W [H5, Corollary 8.6] udowodniliśmy, że każdy funkcjonał generujący jest jednoznacznie wyznaczony przez $*$-reprezentację ρ algebry $C(S_n^+)$ na jakiejś przestrzeni Hilbert H oraz zestaw n wektorów $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$ spełniających warunek $\rho(p_{jk})\xi_j = \rho(p_{jk})\xi_k$ (więcej na ten temat poniżej, przed Twierdzeniem 3.28). W pracy badaliśmy funkcjonały generujące, których reprezentacje z trójek Schürmanna mają postać macierzy Fouriera lub macierzy blokowej, i dla nich podaliśmy warunki na symetrię w języku relacji między ρ i wektorami ξ_i [H5, Proposition 10.3 oraz Theorem 10.4]. Wykazaliśmy też, że maksymalna relacja cykliczna, tj.

$$\rho_\sigma(u) = \begin{bmatrix} 0 & I_H & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_H & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_H \\ I_H & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

nie posiada żadych symetrycznych funkcjonałów generujących.

Analogicznie do przypadku O_n^+, podaliśmy także klasyfikację ad-niezmienniczych funkcjonałów generujących na S_n^+.

Twierdzenie 3.21 ([H5, Theorem 10.10]). *Ad-niezmiennicze funkcjonały generującę na* $\mathrm{Pol}(S_n^+)$ *są postaci*

$$\hat{L} = L \circ (\mathrm{id} \otimes h) \circ \mathrm{ad},$$

przy czym L jest zdefiniowane na $\mathrm{Pol}(S_n^+)_0 \cong \mathrm{Pol}([0,n])$ *wzorem*

$$Lf = -af'(n) + \int_0^n \frac{f(x) - f(n)}{n - x} \mathrm{d}\nu(x)$$

gdzie $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą, a ν jest miarą skończoną na $[0, n]$.

W dowodzie użyliśmy wyniku M. Brannana [Bra13] o izomorficzności algebry funkcji centralnych na S_n^+, $\mathrm{Pol}(S_n^+)_0$, z algebrą wielomianów na $[0, n]$, $\mathrm{Pol}([0, n])$.

Podsumowując ten fragment moich badań, chciałabym podkreślić, że nasze wyniki ustanawiają nowe połączenie między probabilistką (procesami Lévy'ego) a geometrią (operator Diraca, trójka spektralna) dla zwartych grup kwantowych. Opisujemy też konkretne przykłady funkcjonałów, które prowadzą do trójek spektralnych na O_n^+ i na $SU_q(2)$ (Przykłady 3.20 i 3.19).

Chociaż nasza główną motywacją do badania kwantowych procesów Markova było ich potencjalne użycie do opisu dynamiki otwartych systemów kwantowych (*ang. quantum open systems*), to nasze wyniki służą wspólnocie matematycznej także do badań hiperkontraktywności (nieprzemiennych) półgrup ciepła oraz własności średniowalności i własności Haagerupa algebr grup kwantowych (np. [CS15], [?], [CS17], [FH17]).

3.5 Rozkład Lévy'ego-Chinczyna na zwartych grupach kwantowych

Od lat 30-tych XX wieku wiadomo, że generatory klasycznych procesów Lévy'ego na $\mathbb{R}^n$ mogą być opisane za pomocą formuły Lévy'ego-Chinczyna: $(X_t)_{t\geq 0}$ jest procesem Lévy'ego na $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna

$$\phi_X(u) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\langle u,x\rangle}\mu_{X_1}(dx), \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

jest postaci

$$\phi_X(u) = \exp \eta_X(u), \quad \eta_X(u) = \mathrm{i}\langle b,u\rangle - \frac{1}{2}\langle u,\sigma u\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (e^{\mathrm{i}\langle u,y\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle u,y\rangle 1_{|y|\leq 1})\nu(dy)$$

dla pewnych $b \in \mathbb{R}^n$, macierzy dodatnio określonej $\sigma \in M_n(\mathbb{R})$ i tzw. miary Lévy'ego ν na $\mathbb{R}^n$. Pierwszy wyraz powyższej sumy nazywany jest *dryfem*, a drugi – *dyfuzją*. Jeśli $\nu = 0$, to dostajemy funkcję charakterystyczną ruchu Browna z dryfem (patrz Przykład 3.13). Jeśli $b = 0$ i $\sigma = 0$, to ϕ_X jest granicą funkcji charakterystycznych złożonych procesów Poissona (jest to tzw. część skokowa).

Uogólnieniem tego rezultatu jest wzór Hunta dla zwartych grup Liego ([Hun56], także [Li04], [App05]). Niech G będzie zwartą grupą Liego, niech $\{X_1, X_2, \ldots, X_d\}$ będzie ustaloną bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$ i niech $x_1, x_2, \ldots x_d \in C_c^\infty(G)$ będą lokalnymi współrzędnymi tej bazy, tzn. $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ w elemencie neutralnym e. Wówczas dowolny funkcjonał generujący ϕ na G jest postaci

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \sum_{i=1}^{d} c_i X_i f(e) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} X_j X_k f(e) \\ &+ \int_{G\setminus\{e\}} \left(f(g) - f(e) - \sum_{i=1}^{d} x_i(g) X_i f(e) \right) \nu(dg)\end{aligned}$$

dla f dwukrotnie różniczkowalnych. W powyższym wzorze c_i i a_{jk} są stałymi rzeczywistymi, $(a_{jk})_{j,k=1}^d$ jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną, a miara ν na G spełnia warunki

$$\nu(\{e\}) = 0, \quad \int_U \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \mathrm{d}\nu < \infty, \quad \nu(G \setminus U) < \infty$$

dla dowolnego otoczenia U elementu e w G. Podobnie jak w przypadku wzoru Lévy'ego-Chinczyna, tutaj także część liniowa i kwadratowa (pierwsze dwa wyrazy wzoru na $\phi(f)$) opisują ruch Browna z dryfem (część ciągłą), a całka względem ν – część skokową.

Oba wyniki można odczytywać na dwa sposoby. Z jednej strony pozwalają one na klasyfikację procesów Lévy'ego, np. dla $\mathbb{R}^n$ mamy jednoznaczą odpowiedniość między procesami a trójkami (b, σ, ν). Z drugiej strony można je traktować jako twierdzenie o rozkładzie każdego generatora procesu na część pochodzącą od ruchu Browna (z ciągłymi trajektoriami) oraz część skokową (nie zawierającą ciągłych trajektorii).

Problem istnienia podobnego rozkładu dla procesów Lévy'ego na $*$-bialgebrach był po raz pierwszy badany przez Schürmanna w latach 90-tych XX wieku, [Sch90]. W tym kontekście problem staje się "nielokalny" – nie możemy mówić o trajektoraiach ani o ich ciągłości. Z grubsza mówiąc, chcielibyśmy po prostu wiedzieć, czy każdy funkcjonał generujący da się zapisać jako sumę dwóch funkcjonałów generujących, z których jeden jest maksymalnie gaussowski (maksymalność oznacza, że pozostała część nie ma już części gaussowskiej). W tym celu potrzebujemy oczywiście pojęcia generatora gaussowskiego.

DEFINICJA 3.22. Niech A będzie $*$-bialgebrą z kojedynką ε. Funkcjonał generujący $\psi : A \to \mathbb{C}$ nazywamy *gaussowskim*, jeśli znika na potrójnych iloczynach elementów z jądra kojedynki, czyli $\psi(abc) = 0$ o ile tylko $a, b, c \in \ker \varepsilon$.

Jeśli (ρ, η, ψ) jest trójką Schürmanna związaną z ψ, to ψ jest gaussowski wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentacja ρ jest postaci $\rho(a) = \varepsilon(a)I_H$ $(a \in A)$ lub, równoważnie, jeśli kocykl η jest *gaussowski*, tzn. $\eta(a) = \varepsilon(a)\eta(b) + \eta(a)\varepsilon(b)$ dla każdego $a, b \in A$ ([Sch93, Proposition 5.1.]). Funkcjonał ψ i kocykl η opisane w Przykładzie 3.13 są gaussowskie.

Łatwo sprawdzić, że mając dany funkcjonał generujący ψ i związaną z nim trójkę Schürmanna (ρ, η, ψ), reprezentowaną na przestrzeni Hilberta H, możemy zawsze wydzielić z H maksymalną podprzestrzeń gaussowską H_G, tj. największą przestrzeń, na której ρ działa jako $\varepsilon(\cdot)I_H$. Wówczas H_G jest redukująca dla ρ i reprezentacja oraz kocykl mają rozkład na

$$\rho_G = \rho|_{H_G},\ \rho_N = \rho|_{H_G^\perp},\ \rho = \rho_G \oplus \rho_N \quad \text{oraz} \quad \eta_G = P_G\eta,\ \eta_N = (I - P_G)\eta,\ \eta = \eta_G \oplus \eta_N$$

gdzie P_G oznacza projekcję na H_G. Co więcej, η_G jest kocyklem gaussowskim, a η_N jest kocyclem czysto nie-gaussowskim (tzn. $(H_N)_G = \{0\}$). Jeśli istnieją funkcjonały generujące ψ_G i ψ_N takie, że (ρ_G, η_G, ψ_G) i (ρ_N, η_N, ψ_N) są trójkami Schürmannas, to mówimy, że *ψ posiada rozkład Lévy'ego-Chinczyna*. Zwróćmy uwagę na to, że ψ_N odpowiada kocyklowi, który ma trywialną część Gaussowską – w tym sensie ψ_G jest maksymalny gaussowski.

Nasz problem polega teraz na sprawdzeniu, czy każdy funkcjonał generujący (na danej $*$-bialgebrze) posiada rozkład Lévy'ego-Chinczyna. W zasadzie problem sprowadza się do uzupełnienia dwóch par: (ρ_G, η_G) i (ρ_N, η_N) do trójek Schürmannas. Łatwo zresztą pokazać, że jeśli jedna z tych par może być uzupełniona do trójki Schürmanna, to druga także i wtedy ψ bedzie posiadać rozkład Lévy'ego-Chinczyna. Ogólnie jednak dla dowolnej pary (ρ, η), złożonej z $*$-reprezentacji i ρ-ε-kocyklu, może to być niemożliwe (prosty przykład został podany w [Ske99, Example 2.1]). Dlatego wygodnie jest badać nie tylko samo istnienie rozkładu, ale także dwie inne własności (patrz [FGT15], także [Sch90] przy innych oznaczeniach):

DEFINICJA 3.23. Powiemy, że $*$-bialgebra A ma własność:

- **(GC)**, jeśli dowolny kocykl gaussowski $\eta : A \to H$ może być uzupełniony do trójki Schürmanna $(\varepsilon(\cdot)\mathrm{id}, \eta, \psi)$;
- **(NC)**, jeśli dowolna para (ρ, η) złożona z $*$-reprezentacji $\rho : A \to B(H)$ i ρ-ε-kocyklu czysto nie-gaussowskiego $(H_G = \{0\})$ może być uzupełniona do trójki Schürmanna (ρ, η, ψ);
- **(LK)**, jeśli dowolny funkcjonał generujący na A posiada rozkład Lévy'ego-Chinczyna.

Problem istnienia rozkładu Lévy'ego-Chinczyna dla procesów Lévy'ego na danej $*$-bialgebrze można zatem sformułowac jako pytanie: które $*$-bialgebry mają własność (LK)? W świetle uwag sprzed definicji, jeśli A posiada własność (GC) lub (NC), to także posiada własność (LK).

M. Schürmann [Sch90] udowodnił, że rozkład Lévy'ego-Chinczyna istnieje na dowolnych przemiennych $*$-bialgebrach oraz na *algebrze Browna-Glocknera-von Waldenfelsa* $K\langle n\rangle$. Algebra $K\langle n\rangle$ to uniwersalna $*$-algebra z jednynką generowana przez n^2 (niekomutujących) elementów x_{jk} $(j, k = 1, 2, ...n)$, spełniających relacje kodujące unitarność macierzy $x = (x_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(K\langle n\rangle)$: $xx^* = I = x^*x$. Zwrócę tu uwagę na fakt, że $K\langle n\rangle$ nie jest grupą kwantową, a jedynie kwantowym odpowiednikiem półgrupy (macierz x is nie jest odwracalna w $M_n(K\langle n\rangle)$).

W 1998, M. Schürmann i M. Skeide [SS98] pokazali, że każdy funkcjonał generujący na grupie kwantowej $SU_q(2)$ $(q \in (-1, 1) \setminus \{0\})$ posiada rozkład Lévy'ego-Chinczyna. Przez ponad dziesięć kolejnych lat nie nastąpił żaden postęp w badaniu własności (LK), w szczególności nadal nie wiadomo, czy posiadają ją grupy $SU_q(n)$ dla $n \geq 3$.

Pierwszy przykład $*$-bialgebry, które **nie ma** własności (LK) został znaleziony w roku 2015 przez U. Franza, M. Gerholda i A. Thoma [FGT15, Proposition 4.3]. Jest to algebra grupowa podstawowej grupy domkniętej, zorientowanej powierzchni o genusie co najmiej 2. Jest to zatem $*$-bialgebra koprzemienna.

Mój wkład w badania problemu istnienia rozkładu Lévy'ego-Chinczyna jest następujący:

(a) W 2015, w artykule [H4], pokazaliśmy (wspólnie z B. Dasem, U. Franzem i A. Skalskim), że funkcjonały generujące zdefiniowane na $*$-algebrach Hopfa i spełniające pewne warunki symetrii zawsze posiadają rozkład Lévy'ego-Chinczyna.

(b) W 2016, udowodniliśmy w [H5] (wspólnie z U. Franzem i A. Skalskim), że wolna grupa permutacji S_n^+ nie posiada niezerowego generatora gaussowskiego, więc – trywialnie – ma własność (LK). Ten rezultat został później uogólniony przez J Bichona, U. Franza i M. Gerholda [BFG17] na algebry $S_N^+/\langle uD = Du\rangle$, gdzie D jest macierzą zespoloną. Dla odpowiednio dobranych macierzy D dostajemy jako szczególne przypadki kwantowe grupy refleksji oraz grupy kwantowych automorfizmów grafów. Wyniki z [BFG17] pokazują także, że S_n^+ ma własności (GC) oraz (NC).

(c) W 2018, wykazaliśmy w [H6] (wspólnie z B. Dasem, U. Franzem i A. Skalskim), że uniwersalne unitarne i ortogonalne grupy kwantowe U_F^+ i O_F^+ mają własności (GC) i (LK), o ile F^*F ma tylko jednokrotne wartości własne. W drugiej strony, udowodniliśy, że U_n^+ $(d \geq 2)$ i O_n^+ $(d \geq 3)$ nie mają żadnej z własności (GC), (NC) czy (LK). Chciałabym podkreślić, że rodziny wolnych grup kwantowych U_d^+ i O_d^+ stanowią pierwszy znany przykład niekoprzemiennych (czyli także nietrywialnych) grup kwantowych bez rozkładu Lévy'ego-Chinczyna.

Poniżej prezentuję dokładniejszy opis wspomnianych powyżej rezultatów.

3.5.1 Symetryczne funkcjonały generujące

Przy okazji badania własności (T) Kazhdana dla dyskretnych grup kwantowych, D. Kyed wykazał (powołując się na nieopublikowane notatki R. Vergnioux), że *rzeczywiste* kocykle zawsze posiadają funkcjonały generującye [K11, Theorem 4.6]. Bycie "rzeczywistym" jest tam rozumiane jako specyficzna interakcja z koodwrotnością S algebry $\mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ (patrz Definicja 3.25 poniżej dla przypadku $\alpha = \mathrm{id}$). W [H4] uogólniliśmy wynik Kyeda (i Vergnioux) do sytuacji, w której warunek rzeczywistości jest dodatkowo zaburzony (skręcony) przez odwzorowanie nazwane przez nas *bijekcją dopuszczalną*.

Definicja 3.24. Niech A będzie $*$-algebrą Hopfa. Odwzorowanie $\alpha : A \to A$ nazywamy *bijekcją dopuszczalną*, jeśli spełnia następujące warunki:

(1) α jest homomorfizmem;
(2) $\alpha \circ {}^* \circ \alpha \circ {}^* = \mathrm{id}$;
(3) $(\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta = \Delta \circ \alpha$;
(4) odwzorowanie liniowe $(\mathrm{id} + \alpha) : A \to A$ jest bijekcją;
(5) odwzorowanie liniowe $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} + \alpha \otimes \alpha) : A \otimes A \to A \otimes A$ jest bijekcją.

Dwa przykłady bijekcji dopuszczalnych na $A = \mathrm{Pol}(\mathbb{G})$ to: identyczność oraz automorfizmy skalujące (*ang. scaling automorphisms*) τ_{it}, $t \in \mathbb{R}$ (patrz strona 5, z których szczególną rolę gra $\tau_{-i/2}$.

Definicja 3.25. Dla danej bijekcji dopuszczalnej $\alpha : A \to A$, złożenie $S_\alpha = S \circ \alpha$ nazywamy *α-skręconą koodwrotnością*. Powiemy, że kocykl $\eta : A \to D$ jest *α-rzeczywisty*, jeśli

$$\langle \eta(a), \eta(b) \rangle = \langle \eta(S_\alpha(b)^*), \eta(S_\alpha(a^*)) \rangle, \quad a, b \in A.$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli funkcjonał generujący ψ jest S_α-niezmienniczy, tzn. $\psi \circ S_\alpha = \psi$, to związany z nim (przez trójkę Schürmanna i warunek (11)) kocykl jest α-rzeczywisty ([H4, Lemma 2.3]). Główną nowością w [H4] jest odwrócenie tej implikacji, czyli wykazanie, że każdy α-rzeczywisty kocykl posiada funkcjonał generujący, który jest S_α-niezmienniczy.

Twierdzenie 3.26 ([H4, Theorem 2.7]). *Niech A będzie $*$-algebrą Hopfa, $\alpha : A \to A$ będzie bijekcją dopuszczalną i niech η będzie α-rzeczywistym kocyklem na A. Wówczas wzór*

$$\psi((\mathrm{id} + \alpha)(a)) = -\langle \eta(S_\alpha(a_{(1)})^*), \eta(\alpha(a_{(2)})) \rangle = -\langle \eta(\alpha(a_{(1)})^*), \eta(S_\alpha(a_{(2)})) \rangle. \tag{18}$$

definiuje S_α-niezmienniczy funkcjonał generujący ψ spełniający (11).

Definicja ψ jest poprawna: $\mathrm{id} + \alpha$ jest bijekcją i można pokazać, że oba wzory z prawej strony (18) są równe. Ważnym krokiem dowodu jest obserwacja, że α komutuje z operatorem brzegowym tj. $\alpha \circ d = d \circ (\alpha \otimes \alpha)$, gdzie $d : A \otimes A \to A$,

$$d(a \otimes b) = \varepsilon(a)b - ab + a\varepsilon(b), \quad a, b \in A.$$

Powyższy rezultat jest blisko związany z pytaniem o istnienie rozkładu Lévy'ego-Chinczyna. Mianowicie pozwolił on pokazać [H4, Theorem 3.4], że każdy proces Lévy'ego, którego funkcjonał generujący jest S_α-niezmienniczy, pozwala na ekstrakcję jego maksymalnej części gaussowskiej, zatem posiada rozkład Lévy'ego-Chinczyna. Główym elementem w dowodzie, poza Twierdzeniem 3.26, było wykazanie, że maksymalny kocykl gaussowski η_G kocyklu α-rzeczywistego także jest α-rzeczywisty [H4, Lemma 3.3].

Twierdzenie 3.26 okazało się mieć także inne ciekawe zastosowanie. Dzięki niemu udało się nam [H4, Theorem 3.6] uprościć charakteryzację własności Haagerupa dla dyskretnych grup kwantowych. W [DFSW16, Theorem 7.23] pokazano mianowicie, że dyskretna grupa kwantowa $\hat{\mathbb{G}}$ ma własność Haagerupa, jeśli jej dualna (zwarta) grupa kwantowa $\mathbb{G}$ posiada *rzeczywisty właściwy* kocykl. My zauważyliśmy, że do wykazania własności Haagerupa wystarczy znaleźć kocykl właściwy (niekoniecznie rzeczywisty). W dowodzie, kocykl właściwy, którego istnienie zakładamy, symetryzujemy do $\eta + \bar{\eta}$

(operacja opisana w [H3, Theorem 5.4], definicja $\bar{\eta}$ jest podana na stronie 18). Następnie wykazujemy, że taki zsymetryzowany kocykl jest $\tau_{i/2}$-rzeczywisty, czyli zgodnie z Twierdzeniem 3.26 posiada funkcjonał generujący, do którego następnie stosujemy procedurę uśredniania (z dowodu Proposition 7.17, [DFSW16]). W ten sposób uzyskujemy S-niezmienniczy właściwy funkcjonał generujący, a związany z nim (przez trójkę Schřumanna) kocykl jest właściwy i rzeczywisty.

3.5.2 Wolna grupa permutacji

Praca [H5] skupia się na badaniu procesów Lévy'ego na grupie S_n^+. Część oryginalna tej pracy zaczyna się jednak od ważnego rezultatu natury ogólnej – podajemy warunek konieczny i wystarczający na to, aby trójkę Schürmanna można było przenieść z algebry na jej iloraz.

LEMAT 3.27 ([H5, Lemma 5.8]). *Niech B będzie $*$-algebrą generowaną przez rodzinę elementów $a_1, \dots, a_n$, niech ε będzie $*$-charakterem na B i niech (ρ, η, ψ) będzie trójką Schürmanna na (B, ε). Niech ponadto A będzie ilorazem B przez obustronny ideał generowany przez samosprzężone relacje $r_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, r_k(a_1, \dots, a_n) = 0$.*

Jeśli odwzorowania ε, ρ, η i ψ znikają na $r_1, \dots, r_k$, to (ρ, η, ψ) jest trójką Schürmanna na $(A, \varepsilon|_A)$.

Powyższy wynik był istotnym krokiem w badaniach istnienia funkcjonałów generujących nie tylko na S_n^+, ale także na U_n^+ i O_n^+ (z pracy [H6], patrz Podrozdział 3.5.3).

Dla grupy $S_n^+ = \big(C(S_n^+), (p_{jk})_{j,k=1}^n\big)$, bazując na Lemacie 3.27, wykazaliśmy, że dowolny ρ-ε-kocykl η jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wartości na generatorach diagonalnych p_{jj}, $j = 1, \dots, n$ [H5, Lemma 8.1] oraz, że funkcjonały generujące na S_n^+ (więc także procesy Lévy'ego na S_n^+) są jednoznacznie wyznaczone przez związane z nimi kocykle [H5, Lemma 8.2]. Funkcjonał generujący ψ związany z kocyklem η jest zdefiniowany na generatorach jako $\psi(p_{jk}) = (-1)^{\delta_{jk}} \|\eta(p_{jk})\|^2$ dla $j, k = 1, \dots, n$. Oznacza to, że S_n^+ ma własność silniejszą niż (GC) i (NC): każda para (ρ, η) posiada funkcjonał generujący, czyli także własność (LK). Okazuje się jednak, że rozkład Lévy'ego-Chinczyna jest trywialny: nie istnieją niezerowe, gaussowskie funkcjonały generujące na S_n^+ [H5, Proposition 8.7].

Zwróćmy uwagę, że opisana powyżej jednoznaczność funkcjonału związanego z danym kocyklem nie jest zjawiskiem typowym – zwykle kocykl η determinuje funkcjonał ψ poprzez relację

$$\psi(ab) = \langle \eta(a^*), \eta(b) \rangle, \quad a, b \in \ker \varepsilon,$$

czyli tylko z dokładnością do $K_1 \setminus K_2$. Oznaczamy tutaj $K_n := \operatorname{Span}\{a_1 \dots a_n; a_j \in \ker \varepsilon\}$. W przypadku grupy S_n^+, mamy $p_{jk} = p_{jk}^2 \in K_2$ dla $j \neq k$ oraz $p_{jj} - 1 = -(p_{jj} - 1)^2 \in K_2$, czyli $K_2 = K_1$.

Jeden z najważniejszych rezultatów pracy [H5] dotyczy klasyfikacji procesów Lévy'ego S_n^+ dla danej $*$-reprezentacji ρ.

TWIERDZENIE 3.28 ([H5, Corrolary 8.6]). *Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między procesami Lévy'ego na S_n^+ (z dokladnością do równoważności) a klasami równoważności układów*

$$(\rho; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

złożonych z $*$-reprezentacji ρ na pewnej przestrzeni Hilberta H i wektorów $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in H$ spełniających relacje

$$\rho(p_{jj})\xi_j = 0 \quad \textit{oraz} \quad \rho(p_{jk})\xi_j = \rho(p_{jk})\xi_k \;\; \textit{dla dowolnych} \;\; j, k = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Ponieważ dla $n \geq 5$, C*-algebry $C(S_n^+)$ nie są typu I, ich teoria reprezentacji jest zbyt trudna do opisania. W [H5] zbadaliśmy wybrane $*$-reprezentacje algebry $C(S_n^+)$, np. te pochodzace od klasycznych permutacji albo macierzy Fouriera-Hadamarda, opisując związane z nimi kocykle i licząc grupy kohomologii, czyli grupy ilorazowe wszystkich ρ-ε-kocykli przez kocykle pochodzące od procesów Poissona (patrz Przyklad 3.14. Nasze badania pokazały, że wolna grupa permutacji ma strukturę dużo bogatszą niż jej klasyczny odpowiednik, czyli grupa S_n.

3.5.3 Rozkład (LK) dla uniwersalnych grup kwantowych

W pracy [H6], wraz z B. Dasem, U. Franzem i A. Skalskim, badaliśmy problem istnienia rozkładu Lévy'ego-Chinczyna dla przypadku uniwersalnych (unitarnych i ortogonalnych) grup kwantowych. Skupiliśmy się na dwóch skrajnych typach uniwersalnych grup kwantowych: generycznej (w której wartości własne F^*F są parami różne) oraz maksymalnie zdegenerowanej (gdy $F = I$). W przypadku generycznym pokazaliśmy (Twierdzenie 2.1, [H6]), że dla każdego kocyklu gaussowskiego na U_F^+ lub O_F^+ istnieje funkcjonał generujący. Istotnie, można pokazać, że każdy kocykl gaussowski na U_F^+ przyjmuje niezerowe wartości tylko dla generatorów diagonalnych, a wówczas

$$\psi(u_{jk}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ -\frac{1}{2}\|\eta_u(u_{kk})\|^2 & \text{dla } j = k, \end{cases}$$

definiuje poprawnie określony funkcjonał generujący określony na U_F^+. Funkcjonał ten można następnie 'rzutować' na podgrupę O_F^+, uzyskując analogiczne rezultaty dla przypadku ortogonalnego. Zatem generyczne grupy U_F^+ i O_F^+ posiadają własność (GC), co z kolei gwarantuje istnienie rozkładu Lévy'ego-Chinczyna dla dowolnego funkcjonału generującego, czyli własność (LK).

W przypadku maksymalnie zdegenerownym, czyli dla wolnych grup kwantowych U_n^+ i O_n^+ ($F = I$) sytuacja jest zupełnie inna – poza grupą O_2^+ nie posiadają one żadnej z własności (GC), (NC) czy (LK). Dla badania wersji unitarnej, U_n^+, kluczowe są następujące rezultaty, które poprzedzam wprowadzeniem odpowiedniej notacji.

Dla ustalonej macierzowej grupy kwantowej $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), u)$, gdzie $u = (u_{jk})_{j,k=1}^n$ jest reprezentacją fundamentalną grupy $\mathbb{G}$, i dla dowolnej $*$-reprezentacji algebry $C(\mathbb{G})$, $\rho : C(\mathbb{G}) \to B(H)$ definiujemy macierz o współczynnikach w $C(G)$

$$R = \big(\rho(u_{jk})\big)_{j,k=1}^n \in M_n(C(\mathbb{G})).$$

Podobnie, dla ρ-ε-kocyklu $\eta : \mathrm{Pol}(\mathbb{G}) \to H$ definiujemy macierz o współczynnikach w H:

$$V = (\eta(u_{jk}))_{j,k=1}^n \in M_n(H). \tag{20}$$

Podobnie jak w (4), dla macierzy $B = (b_{jk})_{j,k=1}^n \in M_n(x)$, gdzie X jest algebrą $B(H)$ lub przestrzenią Hilberta H, możemy stosować oznaczenie $B^t := (b_{kj})_{j,k=1}^n$. Ponadto jeśli $X = B(H)$, to definiujemy $\bar{B} := (b_{jk}^*)_{j,k=1}^n$.

TWIERDZENIE 3.29 ([H6, Proposition 3.2, Theorem 3.3, Corollary 3.4]). *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $\rho : C(U_n^+) \to B(H)$ $*$-reprezentacją.*

(i) *Macierz $V \in M_n(H)$ definiuje ρ-ε-kocyckl na U_n^+ za pomoca wzoru $\eta(u_{jk}) = V_{jk}$, $j,k = 1,\dots,n$ wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$(R^*V)^t = \bar{R}V^t. \tag{21}$$
W szczególności, każda macierz $V \in M_n(\mathbb{C})$ definiuje kocykl gaussowski ($R = I$) na U_n^+ o wartościach w $\mathbb{C}$ oraz kocykl anty-gaussowski ($R = -I$) na U_n^+ o wartościach w $\mathbb{C}$.

(ii) *ρ-ε-Kocykl η na U_n^+ posiada funkcjonał generujący wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$\sum_{p=1}^{n}\langle \eta(u_{jp}^*), \eta(u_{kp}^*)\rangle = \sum_{p=1}^{n}\langle \eta(u_{kp}), \eta(u_{jp})\rangle, \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{22}$$
W szczególności, gaussowski lub anty-gaussowski kocykl η na U_n^+ o wartościach w $\mathbb{C}$ posiada funkcjonał generujący wtedy i tylko wtedy, gdy $VV^* = V^*V$.

Powyższe fakty pozwalają wskazać takie macierze zespolone $V_1, V_2 \in M_2(\mathbb{C})$, które definiują kocyckle, odpowiednio gaussowski η_1 i anty-gaussowski η_2, na U_n^+ nieposiadające funkcjonałów generujących, np.
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$
Macierze te stanowią kontrprzykłady na własności (GC) i (NC) dla U_2^+. Suma prosta $\eta_1 \oplus \eta_2$ jest wówczas przykładem kocyklu, który wprawdzie posiada funkcjonał generujący, ale nie ma rozkładu Lévy'ego-Chinczyna. Zanurzenie U_2^+ w U_n^+ ($n > 2$) pozwala rozszerzyć ten rezultat na wolne unitarne grupy kwantowe dowolnego wymiaru [H6, Twierdzenie 3.5].

Dowód Twierdzenia 3.29 opiera się na rezultacie Schürmanna dotyczącym istnienia funkcjonału generującego dla każdego kocyklu na algebry Browna-Glocknera-von Waldenfeldsa $K\langle n\rangle$.

TWIERDZENIE 3.30 ([Sch90, Theorem 3.12(i)]). *Niech $n \in \mathbb{N}$, niech $\rho : K\langle n\rangle \to B(H)$ będzie $*$-reprezentacją algebry Browna-Glocknera-von Waldenfelsa na przestrzeni Hilberta H i niech η będzie ρ-ε-kocyklem na $K\langle n\rangle$. Wówczas wzór*
$$\psi(x_{jk}) = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\langle \eta(x_{jp}^*), \eta(x_{kp}^*)\rangle, \quad j,k = 1,\dots,n \tag{23}$$
można rozszerzyć do funkcjonału generującego $\psi : K\langle n\rangle \to \mathbb{C}$, który spełnia warunek (11).

W dowodzie Twierdzenia 3.29 pokazujemy, korzystając z Lematu 3.27 (wynik z pracy [H5]), że funkcjonał generujący ψ zdefiniowany na $K\langle n\rangle$ można 'zrzutować' na U_n^+.

Analogiczne rezultaty dla grupy ortogonalnej są następujące.

TWIERDZENIE 3.31 ([H6, Proposition 3.7, Theorem 3.8, Corrolary 3.9]). *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $\rho : \mathrm{Pol}(O_n^+) \to B(H)$ $*$-reprezentacją.*

(i) *Macierz* $V \in M_n(H)$ *definiuje* ρ-ε-*kocyckl na* U_n^+ *za pomoca wzoru* $\eta(u_{jk}) = V_{jk}$, $j,k = 1,\dots,n$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$-V = (R^*V)^t = \bar{R}V^t. \tag{24}$$

W szczególności, każda macierz antysymetryczna $V \in M_n(\mathbb{C})$, $V = -V^t$, *definiuje kocykl gaussowski na* O_n^+ *o wartościach w* $\mathbb{C}$, *a każda macierz symetryczna definiuje kocykl anty-gaussowski na* O_n^+ *o wartościach w* $\mathbb{C}$.

(ii) ρ-ε-*Kocykl* η *na* O_n^+ *posiada funkcjonał generujący wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{p=1}^{n} \langle \eta(u_{jp}), \eta(u_{kp}) \rangle \in \mathbb{R}, \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{25}$$

W szczególności, gaussowski lub anty-gaussowski kocykl η *na* O_n^+ *o wartościach w* $\mathbb{C}$ *posiada funkcjonał generujący wtedy i tylko wtedy, gdy* $VV^* \in M_n(\mathbb{R})$.

Pozwyższe twierdzenie pozwala, podobnie jak w przypadku unitarnym, wywnioskować, że dla $n \geq 3$, wolne ortogonalne grupy kwantowe O_n^+ nie posiadają własności (GC), (NC) ani (LK) [H6, Twierdzenie 3.10]. Warto wspomnieć, że O_2^+ posiada (GC) i (LK), ale nie posiada (NC), [Ske94].

Nasze wyniki pokazują też, że wiele ('większość') uniwersalnych grup kwantowych U_F^+ i O_F^+ także nie posiada własności (LK), czyli rozkładu Lévy'ego-Chinczyna (wystarczy, aby macierz FF^* miała podwójną, w przypadku unitarnym, lub potrójną, w przypadku ortogonalnym, wartość własną). Należy być jednak ostrożnym w próbach przenoszenia tej intuicji na całą rodzinę zwartych grup kwantowych. Nasze wyniki z pracy [H6] pokazują, że własności (GC) oraz (LK) nie są dziedziczone (z grupy kwantowej na podgrupę), ani przekazywane "w górę" (z podgrupy na grupę kwantową). Faktycznie, jeśli spojrzymy na ciąg podgrup kwantowych $SU_q(2) \subset SU_q(3) \subset U_F^+$ (z macierzą $F = (q^{j-3}\delta_{jk})_{j,k=1}^3$), zauważymy, że $SU_q(2)$ ma własność (GC) [SS98, Corollary 3.3], $SU_q(3)$ nie ma (GC) [H6, Proposition 2.3], a $U_3^+(F)$ ponownie posiada (GC) [H6, Theorem 3.5]. Z drugiej strony, ciąg $O_2^+ \subset O_3^+ \subset K\langle 3\rangle$ obrazuje sytuację w której środkowa grupa, tj. O_3^+ nie ma własności (LK) [H6, Proposition 2.3], podczas gdy jej podgrupa O_2^+ oraz obiekt zawierający ją (ściśle mówiąc, *pół*grupa kwantowa) $K\langle 3\rangle$ posiadają rozkład Lévy'ego-Chinczyna.

3.6 Związki między rozkładem Lévy'ego-Chinczyna a kohomologią Hochschilda

Problem istnienia rozkładu Lévy'ego-Chinczyna dla $*$-bialgebry A jest blisko związany z liczeniem drugiej grupy kohomologii Hochschilda algebry A z trywialnymi współczynnikami – zostało to zaobserwowane już w pracy Schürmanna [Sch90], a ostatnio przypomniane w [FGT15]. W [H6, Section 4] omawiamy zastosowania wyników uzyskanych przy badaniu rozkładu Lévy'ego-Chinczyna do tego właśnie celu.

Dla danej $*$-algebry z jedynką A i danego $*$-charakteru ε na A, dowolna $*$-reprezentacja $\rho : A \to B(H)$ na przestrzeni Hilberta H pozwala rozpatrywać H jako A-bimoduł z działaniami $a.z.b = \rho(a)\varepsilon(b)z$ dla $a,b \in A$ i $v \in H$. W szczególnym przypadku, możemy wybrać także lewe działania 'trywialne': $\rho = \varepsilon$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemu operator *kobrzegowy* $\partial^{n-1} : L(A^{\otimes(n-1)}; H) \to L(A^{\otimes n}; H)$ (przy oznaczenniu $A^{\otimes 0} := \mathbb{C}$) wzorem

$$(\partial^{n-1}\phi)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \rho(a_1)\phi(a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j \phi(a_1 \otimes \ldots \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \ldots \otimes a_n)$$
$$+ (-1)^n \phi(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1})\varepsilon(a_n)$$

dla $\phi \in L(A^{\otimes(n-1)}; H)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Wówczas mamy $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$. Dalej definujemy

- przestrzeń wektorową *n-kocykli*

$$Z^n(A, {}_\rho H_\varepsilon) = \{\phi \in L(A^{\otimes n}; H) : \partial^n \phi = 0\},$$

- przestrzeń wektorową *n-kobrzegów*

$$B^n(A, {}_\rho H_\varepsilon) = \{\partial^{n-1}\psi : \psi \in L(A^{\otimes(n-1)}, H)\},$$

- *ntą grupę kohomologii Hochschilda*

$$H^n(A, {}_\rho H_\varepsilon) = Z^n(A, {}_\rho H_\varepsilon)/B^n(A, {}_\rho H_\varepsilon).$$

Jako specjalny przypadek (dla działań trywialnych) dostajemy *ntą grupę kohomologii Hochschilda z trywialnymi współczynnikami*

$$H^n(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) = Z^n(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)/B^n(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon).$$

Łatwo zobaczyć (rozpisując definicje), że:

- każdy π-ε-kocykl η z trójki Schürmanna jest elementem $Z^1(A, {}_\pi H_\varepsilon)$, czyli 1-kocyklem;
- dla $\eta \in Z^1(A, {}_\pi H_\varepsilon)$, $c_\eta(a \otimes b) = \langle \eta(a^*), \eta(b)\rangle$ należy do $Z^2(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)$, czyli jest 2-kocyklem, patrz [FGT15, Proposition 3.1] lub [H6, Lemma 4.2];
- $\eta \in Z^1(A, {}_\pi H_\varepsilon)$ posiada funcjonał generujący ψ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_\eta \in B^2(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)$ jest 2-kobrzegiem.

W szczególności, gdy A jest $*$-bialgebrą, otrzymujemy równość

$$H^1(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) = Z^1(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) = \{\text{kocykle gaussowskie } \eta : A \to \mathbb{C}\},$$

i z części (i) Twierdzeń 3.29 oraz 3.31 od razu wynika, że

$$H^1(U_d^+) \cong M_d(\mathbb{C}), \quad \text{oraz} \quad H^1(O_d^+) \cong \{V \in M_d(\mathbb{C}) : V^t = -V\} \cong \mathbb{C}^{\frac{d(d-1)}{2}}.$$

Z drugiej strony, części (ii) Twierdzeń 3.29 i 3.31, które charakteryzują kocykle na U_d^+ i O_d^+ posiadające funkcjonały generujące, mogą być użyte do opisania przestrzeni $B^2(A, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)$. Powyższa obserwacja pozwoliła uzyskać główne rezultaty z pracy [H6], dotyczące kohomologicznych własności grup U_d^+ i O_d^+.

Twierdzenie 3.32 ([H6, Theorem 4.6]).

$$H^2(U_d^+, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) \cong sl(d,\mathbb{C}),$$

gdzie $sl(d,\mathbb{C})$ *oznacza przestrzeń zespolonych macierzy* $d\times d$ *o śladzie zero. Zatem* $\dim H^2(U_d^+, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) = d^2-1$.

Zasadniczym elementem dowodu powyższego twierdzenia był pomysł liniowego przyporządkowania

$$\Delta : Z^2(U_d^+) \to M_d(C), \qquad \Delta(c) = \left(\sum_{p=1}^{d} \big(c(u_{pj}^* \otimes u_{pk}) - c(u_{kp}^* \otimes u_{jp})\big)\right)_{j,k=1}^{d},$$

motywacją którego był warunek (ii) Twierdzenia 3.29. Pierwsza część dowodu Twierdzenia 3.32 polegała na wykazaniu, że jądro odwzorowania Δ pokrywa się z przestrzenią 2-kobrzegów: $\ker\Delta = B^2(U_d^+, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)$, [H6, Lemma 4.4]. Wynik ten oznacza, że Δ mierzy w pewnym sensie, jak daleki jest dany 2-kocykl od zbioru 2-kobrzegów; dlatego można o Δ myśleć jako o *funkcji niedoskonałości* (ang. *defect map*).

Jednocześnie łatwo było zauważyć, że $\mathrm{Tr}\Delta(c) = 0$, czyli

$$\Delta(Z^2(U_d^+)) \subset sl(d,\mathbb{C}). \tag{26}$$

Drugim ważnym składnikiem dowodu Twierdzenia 3.32 była konstrukcja bazy obrazu $\Delta(Z^2(U_d^+))$, pokazująca, że zawieranie (26) jest tak naprawdę równością. Stąd można już było wywnioskować, że Δ indukuje liniowy izomorfizm między $H^2(U_d^+) = Z^2(U_d^+)/B^2(U_d^+)$ a obrazem $sl(d,\mathbb{C})$.

Podobne podejście pozwoliło wykazać, że $\dim H^2(O_d^+, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon) = \frac{d(d-1)}{2}$ ([H6, Theorem 4.9]), fakt znany wcześniej z [CHT09] i (w większej ogólności) z [Bic13]. Tutaj także nasza metoda wskazuje *explicite* bazę przestrzeni $H^2(O_d^+, {}_\varepsilon\mathbb{C}_\varepsilon)$.

Wydaje się, że znaleziona przez nas metoda może być zastosowana także do liczenia drugiej grupy kohomologii Hochschilda z trywialnymi współczynnikami innych grup kwantowych, na przykład U_F^+ z dowolną macierzą deformacji F czy łatwych grup kwantowych $S_n'^+$, B_n^+, $B_n'^+$ i $B_n^{\#+}$.

4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Od obrony pracy doktorskiej, tj. od połowy 2008 roku, opublikowałam 6 artykułów naukowych niewchodzących w skład habilitacji. Dotyczą one badań z tematyki **teorii operatorów**, **analizy harmonicznej** i **nieprzemiennej probabilistyki**. Można wśród nich wydzielić trzy zasadnicze kierunki: pierwszy z nich stanowił kontynuację badań z pracy doktorskiej nad deformacjami problemu momentów oraz nieprzemiennymi splotami (ta część obejmuje prace [JK12, Kul10a, Kul12] i jest dokładniej opisana w Rozdziale 4.1), drugi kierunek dotyczy nieprzemiennych niezależności (ruchy Browna dla bm-niezależności, bf-niezależność; prace [KW10, KW13], Rozdział 4.2), trzeci – obejmuje teorię perturbacji i operatorowych modeli dla transformacji miar (praca [KWW17], Rozdział 4.3).

4.1 Własności q-splotu i (p,q)-splot

W pracy doktorskiej zdefiniowałam (p,q)-splot dwóch ciągów liczbowych: dla $p,q>0$ i dwóch ciągów rzeczywistych $(\mu_n)_n,(\nu_n)_n$ przyjmujemy

$$(\mu \star_{p,q} \nu)_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^{k(n-k)} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_p^2 \mu_k \nu_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad [n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q, \quad \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

Wykazałam wówczas, że dla dowolnych $p,q>0$ splot $\star_{p,q}$ zachowuje miary o nośnikach w $\mathbb{R}_+$. Porównałam także (p,q)-splot z q-splotem zdefiniowanym przez G. Carnovale i T. Koornwindera w [CK00]:

$$(\mu \star_q \nu)_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q q^{-k(n-k)} \mu_k \nu_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Okazało się, że obie operacje są łączne i przemienne, ale q-splot zachowuje miary na $\mathbb{R}_+$ tylko dla $0<q<1$. W doktoracie opisałam także transformatę Fouriera dla (p,q)-splotu oraz udowodniłam związane z tą operacją centralne twierdzenie graniczne.

Badania nad wspomnianymi wyżej splotami oraz zależnościami między nimi kontynuowałam także po złożeniu pracy doktorskiej. W pracy [Kul10b] zawarłam porównanie różnego typu splotów definiowanych dla zdeformowanych relacji komutacji, w szczególności wykazałam, że zachodzi związek między q-splotem $\star_q$ ([CK00]) a (q,q)-splotem $\star_{q,q}$: dla dowolnych dwóch ciągów $\mu=(\mu_n)_n$ i $\nu=(\nu_n)_n$ zachodzi równość ciągów

$$(N \circ \mu) \star_{q,q} (N \circ \nu) = N \circ (\mu \star_q \nu), \tag{27}$$

gdzie N oznacza ciąg $([n]_q!)_n$, a $\circ$ oznacza (klasyczny) splot multiplikatywny (czyli mnożenie ciągów po współrzędnych).

Związek ten, będąc uogólnieniem klasycznego pojęcia słabej stabilności miar, stał się motorem współpracy z Barbarą Jasiulis-Gołdyn, której efektem była praca [JK12]. Okazało się bowiem, że zarówno q-splot, jak i (p,q)-splot spełniają warunki Urbanika na splot uogólniony, zinterpretowane odpowiednio w języku ciągów momentów, a relacja (27) sugerowała badanie słabych splotów uogólnionych. Pojęcie splotu uogólnionego (zdefiniowane w pracy K. Urbanika [Urb64]) jest dobrze znane w klasycznej probabilistyce, ale nie miało dotąd przykładów wśród splotów w probabilistyce nieprzemiennej (łatwo sprawdzić, że sploty wolny, boole'owski czy monotoniczny nie spełniają warunku liniowości wzgl. kombinacji wypukłych). W przypadku sprawdzania warunków Urbanika dla q-splotu główna trudność polegała na wykazaniu twierdzenia granicznego typu prawa wielkich liczb. Dowód tego faktu stanowi główny wynik pracy [Kul12] i bazuje istotnie na nieprzemiennym pochodzeniu q-splotu (relacje q-komutacji), wykorzystuje też standardowe techniki nieprzemiennej probabilistyki.

W pracy [JK12] pokazałyśmy, że q-splot jest słabym splotem uogólnionym względem $(1,q)$-splotu, oba natomiast są splotami generującymi splot klasyczny. Co więcej, okazało się, że tego typu zależności były już studiowane przez Kucharczaka i Urbanika w pracy [KU86]. Udało nam się uzupełnić część dowodów z tej pracy oraz wykazać w ogólnej sytuacji, że regularność jest własnością dziedziczoną przez słaby splot.

Pod tą część moich badań naukowych podlega także praca [Kul10a], której głównym celem było opisanie przykładów q- i (p,q)-splotów. Wyniki tej pracy rzucają nieco światła na to, jak skomplikowane mogą być obie operacje – okazuje się, że q-splot dwóch miar punktowych może mieć nośnik nieskończony, a z kolei $(1,1)$-splot takich miar ma rozkład ciągły o gęstości arcus sinus (a więc o zwartym nośniku). Ważnym wynikiem jest opis miary odpowiadającej ciągowi momentów $m_n = \frac{[n]_q![n]_{1/q}!}{n!}$ z centralnego twierdzenia granicznego dla (p,q)-splotu. Miara ta jest związana z miarą badaną przez Ch. Berga w [Ber05], nazywaną "uogólnionym splotem Gamma" (ang. *generalized Gamma convolution*, nie mylić ze splotami uogólnionymi Urbanika).

4.2 Niezależności nieprzemienne

Jednym z kluczowych pojęć w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa jest niezależność zmiennych losowych, którą można (m.in.) zdefiniować jako własność pozwalającą wyliczyć momenty mieszane dwóch zmiennych na podstawie rozkładu każdej ze zmiennych osobno. Pojęcie to uogólnia się do sytuacji, w której przestrzeń zmiennych losowych jest nieprzemienna (jest to $*$- lub C*- algebra ze stanem), ale w przeciwieństwie do sytuacji klasycznej w nieprzemiennej probabilistyce istnieje wiele niezależności, m.in. niezależność tensorowa, wolna [Voi86], booleowska [Boz86, Boz87, SW97], monotoniczna [Mur01]. Próby klasyfikacji niezależności nieprzemiennych podejmowali Speicher [Spe97], Ben Ghorbal i Schürmann [BGS02], Muraki [Mur03], a ostatnio Gerhold i Lachs [GL15] oraz Manzel [MS17]. W zależności od przyjętych założeń (universal positive products, universal natural products, uau-products) dostajemy różne odpowiedzi.

Przykładami, który wymykają się (na razie) powyższym klasyfikacjom, jest bm-niezależności i bf-niezależność. Obie powstają przez przejście od rodzin algebr indeksowanych liczbami naturalnymi na rodziny algebr indeksowane zbiorami częściowo uporządkowanymi, dzięki czemu powstaje "mieszanka" dwóch niezależności (odpowiednio: booleowskiej i monotonicznej, oraz wolnej i monotonicznej).

Bm-niezależność została zdefiniowana w pracy [Wys08], a w pracy [KW10] wraz z Januszem Wysoczańskim badaliśmy odpowiadające tej niezależności ruchy Browna (tzw. bm-ruchy Browna). Są one uogólnieniem klasycznego ruchu Browna w dwóch aspektach – 'parametr czasowy' procesu losowego należy do (wielowymiarowego) zbioru częściowo uporządkowanego zamiast do osi rzeczywistej, a zamiast klasycznej niezależności przyrostów rozważamy bm-niezależność. W pracy rozważaliśmy częściowe porządki zadane przez stożki dodatnie w przestrzeniach euklidesowych: stożki $\mathbb{R}_+^d$, stożki Lorentza i stożki dodatnio określonych, rzeczywistych macierzy symetrycznych (dla różnych wymiarów). Każdy taki stożek $\Pi \subset V$ zadaje naturalny częściowy porządek: $u \preceq_\Pi v$, gdy $v - u \in \Pi$. Zgodnie z klasyfikacją stożków rzeczywistych symetrycznych (patrz [FK94]), przykłady te reprezentują dość dużą klasę tego typu obiektów.

Konstrukcja opisana w naszej pracy stanowi realizację często pojawiającego się w literaturze pomysłu, aby przez ruch Browna rozumieć sumę operatorów kreacji i anihilacji na odpowiedniej przestrzeni Focka, działających na funkcjach charakterystycznych przedziałów. W naszym przypadku odpowiednia przestrzeń Focka (tzw. bm-przestrzeń Focka) jest uogólnieniem konstrukcji Murakiego z [Mur97], a ruch Browna indeksowany dowolnym stożkiem Π jest zdefiniowany jako

$$Q_\xi = a(\chi_{[0,\xi]}) + a^+(\chi_{[0,\xi]}) \quad \text{dla} \quad \xi \in \Pi,$$

gdzie a i a^+ są anihilacją i kreacją. Przyrosty na przedziale $I := [\eta, \xi] \subset \Pi$ są zdefiniowane jako $Q_I = a(\chi_{[\eta,\xi]}) + a^+(\chi_{[\eta,\xi]})$ dla $\xi \in \Pi$. Zaletą założonego częściowego uporządkowania zbioru indeksów jest naturalne uogólnienie pojęcia przedziału, niezbędne w powyższej definicji.

Badając własności tak zdefiniowanego procesu, wykazaliśmy, że dla przedziałów "bm-uporządkowanych" (to właściwe uogólnienie pojęcia przedziałów rozłącznych) przyrosty Q_I są bm-niezależne. Policzyliśmy także momenty rozkładu prawdopodobieństwa ruchu Browna, dowodząc Centralne Twierdzenie Graniczne dla zmiennych bm-niezależnych (bm-CLT, [KW10, Theorem 18]) w wersji dla przedziałów – w pracy [Wys08] było ono udowodnione dla zbiorów nie będących przedziałami. Ta nowa wersja bm-CLT brzmi następująco: znormalizowane sumy zmiennych losowych bm-niezależnych dążą do symetrycznej miary granicznej o parzystych momentach $(g_n)_{n=0}^{\infty}$, które spełniają uogólnioną rekurencję Catalana:

$$g_0 = g_1 = 1, \quad g_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_{k-1} g_{n-k},$$

Ciąg $(\gamma_k)_k$ nazwaliśmy 'charakterystyką objętościową' rozważanego stożka Π i jego znalezienie było kluczowym krokiem w dowodzie bm-CLT: pokazaliśmy [KW10, Theorem 2], że dla każdego z rozważanych stożków istnieje ciąg $(\gamma_k)_k$ taki, że dla dowolnego przedziału $[\eta, \xi] \subset \Pi$ i dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{[\eta,\xi]} (\mathrm{vol}\,[\eta, \rho])^{k-1}\, d\rho = \gamma_k \cdot (\mathrm{vol}\,[\eta, \xi])^k.$$

Przez $\mathrm{vol}\,[\eta, \xi]$ oznaczamy tutaj objetość euklidesową przedziału (każdy rozważany przez nas stożek może być zanurzony w rzeczywistej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$ z minimalnym d, patrz klasyfikacja symetrycznych stożków dodatnich w [FK94]).

Dla przykładu, $\gamma_k = \frac{1}{k^d}$ w przypadku $\mathbb{R}^d_+$, a $\gamma_k = \frac{24}{(3n-1)(3n)(3n+1)}$ dla dwuwymiarowego stożka Lorentza lub symetrycznych, dodatnio określonych macierzy rzeczywistych 2×2. Ciekawy jest fakt, że ten sam ciąg $(\gamma_k)_k$ pojawia się zarówno w twierdzeniu o charakterze geometrycznym ('charakterystyka objętościowa stożka'), jak i w twierdzeniu typowo probabilistycznym (bm-CLT).

Praca [KW13] stanowi próbę zdefiniowania pojęcia *bf-niezależności*, czyli (nieprzemiennej) niezależności zawierającej jako specjalne przypadki niezależność wolną i boole'owską. Tak jak w przypadku bm-niezależności, rodzina algebr jest indeksowana zbiorem częściowo uporządkowanym $\mathcal{X}$, np. przestrzenią wektorową ze stożkiem dodatnim.

W pracy opisaliśmy przestrzeń typu Focka oraz rozszerzenia rodziny operatorów tak, aby w szczególnych przypadkach otrzymać rodziny boole'owsko lub wolnie niezależne. Taka przestrzeń bf-Focka jest rozpięta przez tensory proste, indeksowane elementami parami różnymi i porównywalnymi, a rozszerzenia operatorów działają niezerowo na tensorach tworzących łańcuchy z indeksem operatora. Dla przypadku przestrzeni $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ z porządkiem zadanym przez stożek $\Pi := \{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq a_1, \ldots, 0 \leq a_d\}$ i powyższego modelu bf-rozszerzeń operatorów udowodniliśmy Centralne Twierdzenie Graniczne.

Nasza praca nie definiuje na razie bf-niezależności zmiennych losowych poza modelem operatorowym, ale stanowi pierwszy krok w tym kierunku. Warto też wspomnieć, że niedawno Weihua Liu [Liu17] podjął podobną próbę zdefiniowania niezależności łączącej niezależności wolną i booleowską, korzystając z niedawno wprowadzonej przez Voiculescu dwu-wolności (*bi-freeness of pairs of faces*), [Voi14].

4.3 Modele operatorowe pewnych transformacji miar i perturbacje dwuwymiarowe

Niech $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich miar probabilistycznych o nośniku na osi rzeczywistej $\mathbb{R}$. Transformata Cauchy'ego dowolnej miary $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ jest zdefinowana jako

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Jest to funkcja holomorficzna działająca z górnej półpłaszczyzny $\mathbb{C}^+$ w dolną $\mathbb{C}^-$. Wiadomo, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między miarami z $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a ich transformacjami Cauchy'ego (miarę można odzyskać poprzez tzw. odwrotną transformację Stieltjesa). Ponadto, funkcja zespolona $F(z)$ jest odwrotnością transformaty Cauchy'ego pewnej miary $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (tzn. istnieje μ takie, że $F(z) = \frac{1}{G_\mu(z)}$) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest funkcją Nevanlinny, tzn. istnieją $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz miara dodatnia ρ na $\mathbb{R}$ takie, że

$$F(z) = \alpha + z + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+xz}{x-z} d\rho(x).$$

Korzystając z powyższego twierdzenia, można pokazać, że dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$ i dla dowolnej miary μ na $\mathbb{R}$ takiej, że $m_1 = \int x d\mu(x) < \infty$ (pierwszy moment miary μ jest skończony), funkcja $G(z)$ zdefiniowana równaniem

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{q}{G_\mu} + (1-q)z + (p-q)m_1,$$

jest transformatą Cauchy'ego pewnej miary $\mu_{p,q}$. Przyporządkowanie $\mu \mapsto \mu_{p,q}$, nazwane **U**-transformatą (z parametrami (p,q)), zostało zdefiniowane przez A. Krystek i H. Yoshidę w pracy [KY04]. Jest ono uogólnieniem tzw. t-transformaty opisanej i badanej w pracach [BW98] i [BW01]. (Transformatę Bożejki i Wysoczańskiego dostajemy dla $p = q$, wtedy założenie $m_1 < \infty$ nie jest już potrzebne.)

Głównym celem pracy [KWW17] było opisanie modelu operatorowego dla **U**-transformaty: dla każdego samosprzężonego operatora A na przestrzeni Hilberta H i dla ustalonego unormowanego wektora $u \in Dom(A)$ istnieje jedyna miara μ_A na $\mathbb{R}$, zwana *rozkładem* A, taka, że

$$\langle (z-A)^{-1}u, u\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_A(x)}{z-x}, \quad z \in \mathbb{C}^+. \tag{28}$$

(Wyrażenie po lewej stronie to funkcja Weyla operatora A.) Mając dany operator A, możemy z jednej strony związać z nim jego rozkład μ_A i utworzyć **U**-transformatę tego rozkładu $(\mu_A)_{p,q}$. Z drugiej strony możemy wykonać pewną operację $\mathfrak{U}$ na A, tj. $\mathfrak{U} : A \mapsto \mathfrak{U}(A)$, otrzymując operator

$\mathfrak{U}(A)$ o rozkładzie $\mu_{\mathfrak{U}(A)}$. Przez operatorowy model dla **U**-transformaty miar $\mu \mapsto \mu_{p,q}$ rozumiemy taki wybór operacji $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{p,q}$, aby $(\mu_A)_{p,q} = \mu_{\mathfrak{U}(A)}$. Dostajemy wtedy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mu_A \\ {\scriptstyle \mathfrak{U}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle U_{p,q}} \\ \mathfrak{U}(A) & \longrightarrow & \mu_{\mathfrak{U}(A)} \end{array}$$

Okazało się, że operatorowym modelem **U**-transformaty z parametrami (p, q) jest dwuwymiarowe zaburzenie

$$\mathfrak{U}(A) = A - s(u \otimes Au) - t(Au \otimes u),$$

gdzie $p = st$ i $q = (1-s)(1-t) > 0$ oraz $(u \otimes w)f := \langle f, w\rangle u$.

Szukając operatorowego modelu dla **U**-transformaty znaleźliśmy ogólną metodę liczenia funkcji Weyla dla pewnych ('diagonalnych' i 'antydiagonalnych') dwuwymiarowych zaburzeń operatorów, której zastosowanie wychodzi poza nieprzemienną probabilistykę. Pozwala ona badać widma dwuwymiarowych zaburzeń macierzy i ich zachowanie graniczne dla rosnącego parametru, jak również wartości singularne jednowymiarowych zaburzeń macierzy. Nasza metoda pozwoliła też znaleźć warunek wystarczający na własność przeplotu (ang. *interlacing property*) między widmem macierzy samosprzężonej i widmem jej zaburzenia 'antydiagonalnego'. Własność ta oznacza, że między każdymi dwoma kolejnymi wartościami własnymi macierzy A leży dokładnie jedna wartość własna macierzy $A_{s,t} := A - s(u \otimes Au) - t(Au \otimes u)$. Warto wspomnieć, że badania takie mają duże znaczenie w analizie numerycznej, modelowaniu matematycznym czy teorii sygnałów.

References

[ASvW88] L. Accardi, M. Schürmann, W. von Waldenfels, Quantum independent increment processes on superalgebras, *Math. Z.* **198** (1988), no. 4, 451–477.

[AP89] J. Anderson, W. Paschke, The rotation algebra. *Houston J. Math.* 15 (1989), no. 1, 1–26.

[App05] D. Applebaum, Lévy processes in Euclidean spaces and groups. In: *Quantum independent increment processes. I*, 1–98, Lecture Notes in Math., 1865, Springer, Berlin, 2005.

[Ban96] T. Banica, Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 322 (1996), no. 3, 241–244.

[Ban97] T. Banica, Le groupe quantique compact libre $U(n)$, *Comm. Math. Phys.* **190** (1997), no. 1, 143–172.

[Ban99] T. Banica, Symmetries of a generic coaction. *Math. Ann.* 314(4):763–780, 1999.

[BBC07] T. Banica, J. Bichon, B. Collins, Quantum permutation groups: a survey. *Banach Center Publ.* **78** (2007), 13–34.

[BB09] T. Banica, J. Bichon, Quantum groups acting on 4 points, *J. Reine Angew. Math.* 626(2009), 75–114.

[BC07] T. Banica, B. Collins, Integration over compact quantum groups. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 43 (2007), no. 2, 277–302.

[BV09] T. Banica, R. Vergnioux, Fusion rules for quantum reflection groups. *J. Noncommut. Geom.* 3 (2009), no. 3, 327–359.

[Ban12] T. Banica, Quantum permutations, Hadamard matrices, and the search for matrix models. *Banach Center Publ.* **98** (2012), 11–42.

[BSp09] T. Banica, R. Speicher, Liberation of orthogonal Lie groups. *Adv. Math.* 222 (4) (2009), 1461–1501.

[BGS02] A. Ben Ghorbal, M. Schürmann, Non-commutative notions of stochastic independence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 133 (2002), no. 3, 531–561.

[Ber05] Ch. Berg, On a generalized Gamma convolution related to the q-calculus, In: "Theory and Applications of Special Functions", *Dev. Math.* **13** (2005), 61–76.

[Bic13] J. Bichon, Hochschild homology of Hopf algebras and free Yetter-Drinfeld resolutions of the counit, *Compos. Math.* **149** (2013), no. 4, 658–678.

[BD13] J. Bichon, M. Dubois-Violette, The quantum group of a preregular multilinear form. *Lett. Math. Phys.* 103 (2013), no. 4, 455–468.

[BFG17] J. Bichon, U. Franz, M. Gerhold, Homological properties of quantum permutation algebras, *New York Journal of Mathematics*, 23 (2017), 1671–1695.

[Boz86] M. Bożejko, Positive definite functions on the free group and the noncommutative Riesz product. *Boll. Un. Mat. Ital. A* (6) 5 (1986), no. 1, 13–21.

[Boz87] M. Bożejko, Uniformly bounded representations of free groups. *J. Reine Angew. Math.* 377 (1987), 170–186.

[BS94] M. Bożejko, R. Speicher, Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces. *Math. Ann.* 300 (1994), no. 1, 97–120.

[BW01] M. Bożejko, J. Wysoczański, Remarks on t-transformations of measures and convolutions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 37 (2001), no. 6, 737–761.

[BW98] M. Bożejko, J. Wysoczański, New examples of convolutions and non-commutative central limit theorems. Quantum probability (Gdańsk, 1997), 95–103, *Banach Center Publ.*, 43, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1998.

[Bra12] M. Brannan. Approximation properties for free orthogonal and free unitary quantum groups. *J. Reine Angew. Math.* 672 (2012), 223-251.

[Bra13] M. Brannan, Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups. *Doc. Math.*, 18 (2013), 1349–1402.

[BR97] O. Bratteli, D. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.* Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[CK00] G. Carnovale, T.H. Koornwinder, A q-analogue of convolution on the line, *Methods Appl. Anal.* **7 (2000)**, 705–726.

[CS15] M. Caspers, A. Skalski, The Haagerup approximation property for von Neumann algebras via quantum Markov semigroups and Dirichlet forms. *Comm. Math. Phys.* 336 (2015), no. 3, 1637–1664.

[CP03a] P. S. Chakraborty, A. Pal, Equivariant spectral triples on the quantum $SU(2)$ group. *K-Theory* 28 (2003), no. 2, 107-126.

[Cip08] F. Cipriani, Dirichlet Forms on Noncommutative Spaces. In: *Quantum potential theory*, Lecture Notes in Math. 1954. Springer, 2008.

[CS17] F. Cipriani, J-L. Sauvageot, Amenability and subexponential spectral growth rate of Dirichlet forms on von Neumann algebras. *Adv. Math.* 322 (2017), 308-340.

[CHT09] B. Collins, J. Härtel and A. Thom, Homology of free quantum groups, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **347** (2009), 271-276.

[Co04a] A. Connes, Cyclic cohomology, noncommutative geometry and quantum group symmetries. Noncommutative geometry, 1-71, *Lecture Notes in Math.*, 1831, Springer, Berlin, 2004.

[Con94] A. Connes, *Noncommutative geometry.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[1] K.R Davidson, *C^*-algebras by example.* Fields Institute Monographs, 6. AMS, Providence, RI, 1996.

[DFSW16] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, S. White, The Haagerup property for locally compact quantum groups, *J. Reine Angew. Math. (Crelle)* 711 (2016), 189-229.

[DLSSV05] L. Dąbrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom, J. C. Várilly, The Dirac operator on $SU_q(2)$. *Comm. Math. Phys.* 259 (2005), no. 3, 729-759.

[Dri87] V. G. Drinfel'd, Quantum groups. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798-820. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[FU07] F. Fagnola, V. Umanità, Generators of detailed balance quantum Markov semigroups. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 10 (2007), no. 3, 335-363.

[FK94] J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on symmetric cones.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1994.

[2] U. Franz, *The Theory of Quantum Levy Processes*, Habilitation thesis EMAU Greifswald, 204 pages.

[FGT15] U. Franz, M. Gerhold, A. Thom, On the Lévy-Khinchin decomposition of generating functionals. *Comm. Stoch. Anal.* **9** (2015), no. 4 529–544.

[FH17] U. Franz, G. Hong, F. Lemeux, M. Ulrich, H. Zhang, Hypercontractivity of heat semigroups on free quantum groups, *J. Operator Theory*, 77(1) (2017), 61–76.

[GL15] M. Gerhold, S. Lachs, Classification and GNS-construction for general universal products. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 18 (2015), no. 1, 1550004, 29 pp.

[Hay92] T. Hayashi, Quantum groups and quantum determinants. *Journal of Algebra* 152 (1992), 146–165.

[Hun56] G.A. Hunt. Semi-groups of measures on Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81: 264–293, 1956.

[JK12] B. Jasiulis-Gołdyn, A. Kula, The Urbanik generalized convolutions in the non-commutative probability and a forgotten method of constructing generalized convolution. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 122 (2012), no. 3, 437–458.

[Jim85] M. Jimbo. A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.* 10(1):63–69, 1985.

[Kac61] G. I. Kac. A generalization of the principle of duality for groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 138:275–278, 1961.

[Koe91] H.T. Koelink, On $*$-representatons of the Hopf $*$-algebra associated with the quantum group $U_q(n)$, *Compositio Math.* 77 (1991), 199–231.

[KoSp09] C. Koestler, R. Speicher, *A noncommutative de Finetti theorem: invariance under quantum permutations is equivalent to freeness with amalgamation*, *Commun. Math. Phys.* **291** (2009), 473–490.

[KY04] A. Krystek, H. Yoshida, Generalized t-transformations of probability measures and deformed convolutions. Probab. Math. Statist. 24 (2004), no. 1, Acta Univ. Wratislav. No. 2646, 97–119.

[KU86] Kucharczak, K. Urbanik, Transformations preserving weak stability, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 34(7-8) (1986), 475–486.

[Kul10a] A. Kula, The q-deformed convolution: examples and applications to moment problem, *Operators and Matrices* 4(4) (2010), 593–603.

[Kul10b] A. Kula, Convolutions related to q-deformed commutativity. Noncommutative harmonic analysis with applications to probability II, 189–200, *Banach Center Publ.*, 89, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2010.

[Kul12] A. Kula, Limit theorem for the q-convolution, Noncommutative harmonic analysis with applications to probability III, 245–255, Banach Center Publ., 96, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2012.

[KW10] A. Kula, J. Wysoczański, Non-commutative Brownian motions indexed by partially ordered sets, ukaże się w *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab.Relat. Top.* **13(4)** (2010).

[KW13] A. Kula, J. Wysoczański, An example of a Boolean-free type central limit theorem. *Probab. Math. Statist.* 33 (2013), no. 2, 341–352.

[KWW17] A. Kula, M. Wojtylak, J. Wysoczański, Rank two perturbations of matrices and operators and operator model for t-transformation of probability measures. *J. Funct. Anal.* 272 (2017), no. 3, 1147–1181.

[KV00] J. Kustermans, S. Vaes. Locally compact quantum groups. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), 33(6):837–934, 2000.

[K11] D. Kyed, A cohomological description of property (T) for quantum groups. *J. Funct. Anal.* 261(6) (2011), 1469–1493.

[3] D. Kyed, P. Sołtan, Property (T) and exotic quantum group norms. (English summary) J. Noncommut. Geom. 6 (2012), no. 4, 773–800.

[Li04] M. Liao, *Lévy processes in Lie groups. Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 162. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Liu17] Weihua Liu, Free-Boolean independence for pairs of algebras, Preprint arXiv:1710.01374 [math.OA], 2017.

[MS17] S. Manzel, M. Schürmann, Non-commutative stochastic independence and cumulants. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 20 (2017), no. 2, 1750010, 38 pp.

[Mur97] N. Muraki, Non-commutative Brownian motion in monotone Fock space, *Comm. Math. Phys.* **183** 1997, 557–570.

[Mur01] N. Muraki, Monotonic independence, mototonic central limit theorem and monotonic law of small numbers, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab.Relat. Top.* **4** 2001, 39–58.

[Mur03] N. Muraki, The five independences as natural products. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* 6 (2003), no. 3, 337–371.

[PW90] P. Podleś, S.L. Woronowicz, Quantum deformation of Lorentz group. *Comm. Math. Phys.* 130 (1990), no. 2, 381–431.

[Sch90] M. Schürmann, Gaussian states on bialgebras, In: *Quantum Probability and Applications* ***V***, Lecture Notes in Math. **1442** (1990) 347–367.

[Sch93] M. Schürmann, *White noise on Bialgebras*, Lecture Notes in Math. 1544, Springer 1993.

[Sch95] M. Schürmann, Non-commutative probability on algebraic structures. In: *Probability measures on groups and related structures, XI* (Oberwolfach, 1994), 332–356, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[SS98] M. Schürmann, M. Skeide, Infinitesimal generators on the quantum group $\mathrm{SU}_q(2)$, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1(4)** (1998), 573–598.

[Ska14] A. Skalski, Quantum symmetry groups and related topics. In: *Quantum symmetries. Selected lectures from the Winter School "Operator Spaces, Noncommutative Probability and Quantum Groups" held in Metabief, December 1-12, 2014.* Lecture Notes in Math. 2189, Springer, 2017.

[Ske94] M. Skeide, The Lévy-Khintchine formula for the quantum group $SU_q(2)$, *PhD thesis*, Heidelberg, 1994, available at `http://web.unimol.it/skeide/`.

[Ske99] M. Skeide, Infinitesimal generators on the quantum group $SU_q(2)$ in the classical and anti-classical limit, *Open Syst. Inf. Dyn.* 6 (1999) 375–414.

[Spe97] R. Speicher, On universal products. In: *Free probability theory* (Waterloo, ON, 1995), 257–266, Fields Inst. Commun., 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[SW97] R. Speicher, R. Woroudi, Boolean convolution. In: *Free Probability Theory*, Fields Inst. Commun. 12 (1997), 267–279.

[Tim08] T. Timmermann, *An invitation to quantum groups and duality.From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond*, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[Urb64] K. Urbanik, Generalized convolutions, *Studia Math.* **23** (1964), 217-245.

[vD93] A. Van Daele, Dual pairs of Hopf *-algebras, *Bull. LMS* **25** (1993), 209-230.

[vDW96] A. Van Daele, Sh. Wang, Universal quantum groups. *Internat. J. Math.* 7 (1996), no. 2, 255–263.

[Voi86] D.V. Voiculescu, Addition of certain noncommuting random variables, *J. Funct. Anal.* 66 (1986), no. 3, 323–346.

[Voi14] D.V. Voiculescu, Free probability for pairs of faces I. Comm. Math. Phys. 332 (2014), no. 3, 955–980.

[Wan98] S. Wang, Quantum symmetry groups of finite spaces. *Comm. Math. Phys.* **195** (1998), no. 1, 195–211.

[W87a] S.L. Woronowicz, Twisted SU(2) group. An example of a noncommutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 23 (1987), no. 1, 117–181.

[W87b] S.L. Woronowicz, Compact matrix pseudogroups. *Comm. Math. Phys.* 111 (1987), 613–665.

[W88] S.L. Woronowicz, Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups. *Invent. Math.*, 93(1)(1988), 35–76.

[W96] S.L. Woronowicz, From multiplicative unitaries to quantum groups. (English summary) *Internat. J. Math.* 7 (1996), no. 1, 127–149.

[W98] S. L. Woronowicz, Compact quantum groups, *Symétries quantiques (Les Houches, 1995)*, 845-884, North-Holland, Amsterdam, 1998.

[Wys04] J. Wysoczański, Twisted product structure and representation theory of the quantum group $U_q(2)$. *Rep. Math. Phys.* 54 (2004), no. 3, 327–347.

[Wys08] J. Wysoczański, Bm-central limit theorems for positive definite real symmetric matrices, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab.Relat. Top.* **11 (1)** 2008, 33–51.

[Zak91] S. Zakrzewski, Matrix Pseudogroups Associated with Anti-Commutative Plane. *Lett. Math. Phys.*, 21 (1991), 309-321.

[ZZ05] X.X. Zhang, E.Y. Zhao, The compact quantum group $U_q(2)$. I. *Linear Algebra Appl.* 408 (2005), 244–258.

[Zh06] X.X. Zhang, The compact quantum group $U_q(2)$. II. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 22 (2006), no. 4, 1221–1226.

Chojnacka-Kula