Prof. dr hab. Leszek Plaskota
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja rozprawy doktorskiej
autorstwa mgr. FILIPA CHUDEGO

pt. "New algorithms for Bernstein polynomials, their dual bases, and B-spline functions"

KONKLUZJA

Przedłożona rozprawa doktorska jednoznacznie spełnia wymagania formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie mgr. FILIPA CHUDEGO *do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

UZASADNIENIE

Rozprawa doktorska mgr. FILIPA CHUDEGO poświęcona jest nowym algorytmom dla zadań numerycznych grafiki komputerowej i modelowania geometrycznego. Algorytmy te dotyczą obliczeń związanych z krzywymi i powłokami Béziera, gdzie kluczową rolę odgrywają klasyczne wielomiany Bernsteina, oraz krzywymi B-sklejanymi. Istotną część rozprawy stanowią nowe związki różniczkowe i rekurencyjne w temacie funkcji B-sklejanych, wielomianów Bernsteina i ich dualnych odpowiedników, które znajdują następnie zastosowanie w konkretnych algorytmach. Doktorant dba o to, aby konstruowane algorytmy miały możliwie niską, a nawet optymalną złożoność, oraz dobre własności numeryczne. Takim jest, przykładowo, najefektowniejszy moim zdaniem nowy algorytm obliczający wartości krzywej Béziera. Posiada on wygodną interpretację geometryczną i optymalną złożoność, lepszą od tradycyjnego algorytmu de Casteljau. Implementacje i testy dla prezentowanych algorytmów uzupełniają i potwierdzają wyniki teoretyczne.

Duża część wyników rozprawy została już opublikowana w trzech pracach w *Applied Mathematics and Computation, Numerical Algorithms* oraz *Computer Aided-Design*, w których promotor był współautorem. (Prace te oznaczone są w rozprawie numerami [18], [19] i [96].)

Ocena strony merytorycznej

Rozprawa zaczyna się od mocno rozbudowanego wstępu (rozdział 1), który oprócz krótkiego streszczenia uzyskanych wyników zawiera podstawowe informacje: definicje, fakty, twierdzenia i algorytmy, dotyczące wielomianów Bernsteina, dualnych wielomianów Bernsteina, krzywych i powłok Béziera oraz funkcji B-sklejanych, które są wykorzystywane w dalszej cześci rozprawy. Ta część informacyjna jest jasno i bardzo przystępnie napisana, mogłaby służyć za materiał źródłowy do podstawowego kursu grafiki komputerowej i modelowania matematycznego. Wydaje się jednak, że lepiej byłoby podzielić ten rozdział na dwie części: rzeczywisty wstęp do rozprawy i przegląd potrzebnych narzędzi i algorytmów. Dodałbym również formalną definicję notacji 'O-duże', gdyż czasami może ona prowadzić do niejednoznaczności, zwłaszcza gdy mamy do czynienia z więcej niż jednym parametrem.

W rozdziale 2 przedstawiony jest nowy alorytm dla obliczania wartości krzywej Béziera. Atrakcyjność algorytmu polega nie tylko na tym, że posiada optymalną złożoność $O(nd)$ (w porównaniu do $O(dn^2)$ dla algorytmu de Casteljou), gdzie n jest liczbą punktów kontrolnych, a d wymiarem tych punktów, ale również na dobrych własnościach zarówno numerycznych jak i geometrycznych (m.in., zachowuje własność otoczki wypukłej). Jego konkurencyjność wobec tradycyjnego algorytmu de Casteljou została potwierdzona licznymi testami. Autor wykazuje również na możliwe uogólnienia, w tym na wymierne, zarówno prostokątne jak i trójkątne, powłoki Béziera.

Rozdział 3 poświęcony jest nowym metodom obliczeniowym dla funkcji B-sklejanych, w kontekście krzywych B-sklejanych. Tutaj punktem wyjścia jest algorytm de Boor-Cox'a obliczający punkt na krzywej B-sklejanej kosztem $O(m^2d)$, gdzie m jest stopniem krzywej, a d jak wcześniej wymiarem przestrzeni. Autor proponuje inne podejście do problemu wykorzystujące współczynniki rozwinięcia bazowych funkcji B-sklejanych w podprzedziałach, w bazie Bernsteina albo bazie Taylora. Stosując pewne związki rekurencyjne pokazuje, że wszystkie te współczynniki można obliczyć w czasie $O(nm^2)$, gdzie n jest liczbą punktów siatki, a więc w czasie proporcjonalnym do liczby wszystkich współczynników. Dzięki temu, całkowity koszt obliczenia wartości M różnych krzywych B-sklejanych w N punktach wynosi $O(nm^2 + Nm^2 + NMmd)$, w porównaniu do $O(NMm^2d)$ gdy użyjemy tradycyjnego podejścia de Boor-Cox'a.

Rozdziały 4 i 5 traktują o własnościach dualnych wielomianów Bernsteina, przy czym w pierwszym z nich chodzi przede wszystkim o związki różniczkowe, a w drugim o związki rekurencyjne. Te ostatnie są następnie wykorzystane, m.in., w konstrukcji algorytmu obliczającego wartości dualnego wielomianu Bernsteina w M danych punktach w optymalnym czasie proporcjonalnym do nM, co może nieco zaskakiwać. Godna uwagi jest również bardzo dobra stabilność algorytmu, nawet dla wielomianów stopnia rzędu kilka tysięcy, potwierdzona przez autora licznymi testami numerycznymi.

W ostatnim rozdziale 6 rozpatrywany jest problem redukcji stopnia krzywej Béziera z ograniczeniami. Zaprezentowany jest algorytm wykorzystujący wcześniejsze i pewne nowe związki rekurencyjne. Co prawda, algorytm nie poprawia całkowitej liczby operacji arytmetycznych w porównaniu do wcześniej znanego, podobnego algorytmu autorstwa, m.in., promotora rozprawy, ale część obliczeń może być przeprowadzona równolegle. (Tu efektywność nie została zweryfikowana testami numerycznymi.)

Ocena strony formalnej

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Zwraca uwagę nienaganna szata graficzna. Na 146 stron bardzo starannie i jasno zredagowanego tekstu składają się 6 rozdziałów, bibliografia i zawsze pomocny indeks pojęć, jest też opatrzona streszczeniem w językach polskim i angielskim. Cenne dla czytelnika są uwagi na początku każdego rozdziału na temat relacji pomiędzy wcześniejszymi wynikami, a tymi pokazanymi w danym rozdziale. To wszystko sprawia, że rozprawę czyta się z przyjemnością. Tego wrażenia nie zakłócają wymienione poniżej drobne usterki redakcyjne, które zawsze są obecne w większych opracowaniach.

- strona 9, linia +12: "in the following way"
- 9, +14: "the factorial"
- 17, Thm. 1.38: usunąć indeks 2 w $\|\cdot\|_2$
- 27, -3: "an example of a polynomial"
- 28, -7: "...shows an example of a rational..."
- 38, Thm. 1.79: usunąć indeks 2 w $\|P_n - R_m\|_2^2$
- 55, -4: "...that W_i is used..."
- 70, +1: "...in the way how the rows are connected"
- 81, -7: usunąć nawiasy okalające $u \in [t_i, t_{i+1})$
- 91, Thm 3.8: Formuła (3.8) zachodzi również wtedy, gdy współczynniki $b_k^{(i+1,j)}$ nie są znane.
- 98, -7: "multiplicity greater than 1"
- 102, +1: "Eq. (3.6) can be used"
- 109, -13: "Now, putting the right-hand sides of (4.5) and (4.6) in place of $D_{i+1}^n(x;\alpha,\beta)$ and $D_{i-1}^n(x;\alpha,\beta)$ in the right-hand side of Eq. (4.3), ..."
- 112, +9: Operator $\mathcal{E}^m$ działa raczej na całych ciągach, a nie na indeksach i.
- 124, -3: "in this section"
- 125, +10: "In the sequel, the parameters α, β will often be omitted, i.e.,"
- 125, -3: "The proposed method ... uses the recurrence relation"
- 135, -8: "all the columns"

Podsumowanie

Wyniki zaprezentowane w rozprawie mgr. Filipa Chudego stanowią niewątpliwy wkład w teorię wielomianów Bernsteina i funkcji B-sklejanych, a będące ich konsekwencją algorytmy znajdują swoje miejsce w grafice komputerowej i modelowaniu geometrycznym. Doktorant wykazał swą erudycję matematyczną. Dowody mają w większości charakter rachunkowy, ale są dość skomplikowane i wymagają nietrywialnego kojarzenia związków pomiędzy różnymi obiektami, w tym funkcjami specjalnymi. Jeszcze raz podkreślę przejrzystość całej prezentacji i dbałość o komfort czytelnika.

Dlatego wnioskuję jak w konkluzji na początku recenzji.

W-wa 31.08.2022