



UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Instytut Informatyki

prof. dr hab. Łukasz Kowalik

Warszawa, 13 sierpień 2021.

Recenzja rozprawy doktorskiej „*Nowoczesne rozwiązania online dla pradawnych problemów grafowych*” autorstwa mgr. Pawła Schmidta

Rozprawa doktorska mgr. Pawła Schmidta dotyczy algorytmów on-line dla czterech problemów: lokalizacji fabryk, skojarzeń z opóźnieniami, drzewa Steinera z wypożyczaniem oraz uogólnionego problemu k serwerów. Są to naturalne i ważne problemy badane przez wielu czołowych naukowców w wielu ośrodkach na świecie. W trzech pierwszych problemach, autor koncentruje się na algorytmach deterministycznych.

Problem lokalizacji fabryk

Problem lokalizacji fabryk (facility location) jest klasycznym problemem optymalizacji dyskretnej. Mając dany graf ważony dwudzielny łączący klientów C i fabryki F oraz koszty otwarcia fabryk, należy wybrać zbiór fabryk do otwarcia, aby zminimalizować łączny koszt otwarcia fabryk i połączenia z nimi klientów. Autor rozważa wersję on-line, w której kolejno pojawiają się elementy pewnego podzbioru klientów $A \subseteq C$, i po każdym kolejnym kliencie należy zdecydować, czy otworzyć nową fabrykę. Najczęściej w literaturze koszty połączeń tworzą metrykę, jednakże w pracy autor bada przypadek ogólny, gdy koszty te są dowolne. Wcześniej problem był badany przez Alona et al. którzy uzyskali randomizowany algorytm $O(\log |F| \log |A|)$ -konkurencyjny. Autor pokazuje deterministyczny algorytm $O(\log |F|(\log |C| + \log \log |F|))$ -konkurencyjny i jest to pierwszy nietrywialny algorytm deterministyczny dla tego problemu. W warstwie technicznej, autor użył metody prymalno-dualnej w celu uzyskania rozwiązania ułamkowego o dobrym współczynniku konkurencyjności, które ponadto posiada dodatkowe własności umożli-

liwiający następnie zaokrąglenie do rozwiązania całkowitoliczbowego, zachowując kontrolę nad odpowiednią zwyżką kosztu.

Problem skojarzeń z opóźnieniami

W problemie tym dana jest n -wierzchołkowa przestrzeń metryczna M , a następnie, w formie on-line pojawia się $2m$ żądań, tzn. par (p_i, t_i) , gdzie $p_i \in M$, natomiast t_i jest czasem pojawienia się żądania (ciąg $(t_i)_{i=1}^{2m}$ jest rosnący). Celem jest łączenie punktów w pary tak, aby zminimalizować sumę odległości połączonych punktów i czasów oczekiwania na połączenie. Problem ten został wprowadzony przez Emeka et al. w 2016 roku, a obecnie najlepszy algorytm pochodzi od Azara et al. i ma współczynnik konkurencyjności $O(\log n)$. Jest to jednak algorytm randomizowany. W rozprawie doktorskiej autor pokazuje natomiast algorytm deterministyczny, uzyskując współczynnik konkurencyjności $O(m^{2.46})$. W warstwie technicznej jest to prosty algorytm zachłanny, jednakże w rzeczywistości jest on oparty o ciekawą analizę kombinatoryczną struktury ścieżek i cykli alternujących (złożonych z krawędzi rozwiązania budowanego przez algorytm i optymalnego).

Problem drzewa Steinera z wypożyczeniem

W klasycznym problemie drzewa Steinera, dany jest graf ważony G z wyróżnionym wierzchołkiem r oraz zbiór k terminali K , a celem jest znalezienie najtańszego podgrafu, w którym wszystkie terminale połączone są do r . Problem ten był oczywiście rozważany także w wersji on-line, gdzie graf G znany jest z góry, natomiast terminale pojawiają się po kolei, a zadaniem algorytmu jest rozszerzanie wcześniej zbudowanego rozwiązania na kolejny terminal. Autor rozważa bardziej złożony wariant tego problemu, w którym algorytm nie wykupuje krawędzi grafu raz na zawsze. Zamiast tego, dostępny jest zbiór L rodzajów wypożyczeń, tzn. par czas wypożyczenia i cena. Algorytm może więc wypożyczać krawędzie na pewien czas, po cenie potencjalnie niższej niż zakup krawędzi na stałe. Tę wariację na temat problemów projektowania sieci zaproponował w 2005 roku Meyerson. Jego algorytm dla problemu drzewa Steinera daje randomizowany współczynnik konkurencyjności $O(\log |L| \cdot \log n)$, gdzie $n = |V(G)|$. W rozprawie autor pokazuje deterministyczny algorytm $O(|L| \cdot \log k)$ -konkurencyjny, a więc istotnie lepszy niż wcześniejszy gdy $k \ll n$, wskazuje też dolne ograniczenie $\Omega(L)$, a więc np. współczynnik $O(\log |L| \cdot \log k)$ byłby niemożliwy. Kluczowym

pomysłem było zastosowanie techniki hierarchicznie separujących drzew, wprowadzonej w 2015 roku przez Umboha, który rozwiązał z jej użyciem m.in. powiązany problem *Rent or buy* (drzewo Steinera, w którym krawędź można albo kupić albo wypożyczyć po niższej cenie).

Uogólniony problem k serwerów w metrykach dyskretnych

Problem k serwerów jest flagowym problemem teorii algorytmów on-line. W problemie tym dana jest przestrzeń metryczna M oraz k punktów M , które są początkowymi położeniami k serwerów. Następnie, w formule on-line, pojawiają się żądania, tj. punkty M . Po każdym żądaniu algorytm musi przemieścić jeden z serwerów do żądania. Celem jest minimalizacja sumarycznej zmiany położenia serwerów. Od 2018 roku znany jest randomizowany algorytm $O(\log^6 k)$ -konkurencyjny. Od 2004 roku badane jest uogólnienie, w którym każdy serwer porusza się we własnej przestrzeni metrycznej M_i , żądania są k -krotkami w (r_1, \dots, r_k) , gdzie $r_i \in M_i$, natomiast żądanie jest obsłużone, gdy dla pewnego i serwer z przestrzeni M_i jest w punkcie r_i . Od 2006 roku znany jest algorytm $O(1)$ -konkurencyjny dla $k = 2$, natomiast do dziś istnienie algorytmu $f(k)$ -konkurencyjnego jest problemem otwartym. Autor zajmuje się szczególną wersją, w której wszystkie metryki są dyskretne (ale mogą się różnić liczbą punktów). W 2018 roku Bansal et al. zaproponowali $O(k^3 \log k)$ -konkurencyjny algorytm randomizowany. W rozprawie doktorskiej autor pokazuje jak poprawić ten algorytm uzyskując współczynnik $O(k^2 \log k)$. W tym celu autor uzyskuje doskonałe zrozumienie algorytmu Bansala et al., dzięki czemu jest w stanie wyabstrahować kluczowy element rozumowania jako rozwiązanie pewnej gry z adwersarzem, którą nazywa grą z Hydrą (Hydra game). W ten sposób skomplikowane rozumowanie dotyczące przestrzeni konfiguracji serwerów można było wyrazić w formie prostego obiektu kombinatorycznego, z którym łatwiej jest pracować — i rzeczywiście, autor podaje lepszą strategię gry z Hydrą niż (wyrażona implícite) strategia Bansala et al.

Ocena rozprawy

W rozprawie autor wykazał się doskonałą znajomością aktualnych trendów w dziedzinie algorytmów on-line. Recenzent jest pod dużym wrażeniem różnorodności użytych technik, często wysoce nietrywialnych i inspirowanych pracami publikowanymi w ciągu ostatnich kilku lat. Świadczy to o du-

żej otwartości autora, znacznej pracy włożonej w zrozumienie dostępnej literatury a przede wszystkim o biegłości w stosowaniu zaawansowanych narzędzi matematycznych do rozwiązywania problemów badawczych znajdujących się w głównym nurcie współczesnej informatyki.

Poziom redakcyjny rozprawy jest bardzo wysoki. Rozprawa rozpoczyna się rozdziałem wstępnym, który łagodnie wprowadza czytelnika w tematykę algorytmów online, stosowanych technik oraz wyników rozprawy. Następnie pojawiają się rozdziały zawierające wyniki dla kolejnych problemów. Należy przy tym podkreślić, że rozumowania są niezwykle czytelne, co zostało uzyskane dzięki umiejętnemu dobraniu struktury dowodów (szczególnie dobrze widać to w ostatnim rozdziale, gdzie wprowadzono wspomnianą grę z Hydrą). Autor we wszystkich rozumowaniach dba, aby przed formalnymi matematycznymi dowodami pojawiły się intuicje ułatwiające czytelnikowi zrozumienie istoty rozumowań. Rozprawa kończy się wskazaniem dalszych kierunków badawczych.

Podsumowanie

W związku z powyższym, stwierdzam, że rozprawa mgr. Pawła Schmidta **spełnia** ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane dysertacjom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie autora do dalszych etapów postępowania.